This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Math
3000
6

Digitized by Google

32.1.6.

Math 3000.6

BD. Sept. 1856.

SCIENCE CENTER LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Seinem verehrten Lehrer, Hr. Prof. Jacobi
der Verfasser.

Contents.

1 See opposite.

2. Programme d'Invitation a l'Examen Public du College Royal Français. Fixé au 29 Sept. 1848. Berlin.

Digitized by Google

Jahresbericht

über die

Königliche Realschule zu Berlin,

womit

zu den öffentlichen Prüfungen und Redeübungen

am 1sten, 2ten und 3ten April

im Hörsaale des Königlichen Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums

ehrerbietigst einladet

der

Director Ranke.

Vorangeht eine mathematische Abhandlung des Hülfslehrers Dr. Ferdinand F. Joachimsthal:

Ueber die Bedingung der Integrabilität.

Berlin, 1844.

Gedruckt bei A. W. Hayn.

Digitized by Google

Math 3000.6 ~~3158.44~~

1851 Dec 2
Raven Fund

Sacchi Lit 1507

Digitized by Google

Ueber die Bedingung der Integrabilität.

§. 1.

Wenn die partielle Differentiation durch die Charakteristik ∂, die vollständige durch d, die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d\overset{1}{y}^2}{dx^2}$, ... $\frac{d\overset{n}{y}^2}{dx^n}$ durch y', y'' ... $y^{(n)}$ bezeichnet werden, so haben Euler und Condorcet den Lehrsatz aufgestellt:

Ist f eine Function von x, y', y'', ... $y^{(n)}$ und fdx das genaue Differential eines Ausdrucks der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, ohne eine Relation zwischen x und y zu Hülfe zu nehmen, so muß identisch die Relation erfüllt werden

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)}{dx^2} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)}{dx^n} = 0\,, \quad (1)$$

und umgekehrt.

Lagrange, der eine Vorlesung in den Leçons sur le calcul des fonctions dieser und verwandten Untersuchungen gewidmet hat, schließt hieraus, was mit der Operation des Differentiirens in Einklang ist, daß in f der höchste Differentialquotient nur linear vorkommen dürfe. Im entgegengesetzten Falle enthielte das letzte Glied der Formel (1) $\frac{d^n\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)}{dx}$ und nur dieses die Größe $y^{(2n)}$, und der Ausdruck auf der linken Seite in (1), den wir der Kürze halber beständig mit A bezeichnen wollen, könnte nicht identisch verschwinden. Die Function f muß demnach von der Form $p + qy^{(n)}$ sein, wo p und q Ausdrücke der $(n-1)^{ten}$ Ordnung sind.

Nach dieser Erörterung betrachtet Lagrange die speciellen Fälle $n = 1$, und $n = 2$. Für den ersten wird (1)

Digitized by Google

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = o \,,$$

welches die bekannte Bedingung ist, damit $p + q\frac{dy}{dx}$ ein genaues Differential sei. Für den zweiten Fall verwandelt sich A in einen Ausdruck $P + Qy''$, wo P und Q von der ersten Ordnung sind, und der demnach identisch nur verschwinden kann, wenn $P = o$, und $Q = o$ ist. Lagrange schließt endlich mit den Worten (Leçons s. l. calc. d. fonct. pag. 421):

„Ensuite on peut aussi prouver, que de même que pour les fonctions du second ordre l'équation de condition se décompose en deux, pour les fonctions du troisième ordre elle se décomposera en trois, pour les fonctions du quatrième ordre elle se décomposera en quatre et ainsi de suite."

Da diese Zerlegung meines Wissens nirgends ausgeführt worden ist, so will ich sie hier mittheilen, und zuerst die dabei vorkommende Schwierigkeit erwähnen.

In dem letzten Gliede $\frac{d^n\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)}{dx^{(n)}}$, was für $f = p + qy^{(n)}$ in $\frac{d^n q}{dx^n}$ übergeht, kommen Ausdrücke der $(n-1)^{ten}$ Ordnung vor, sowohl alleinstehend, wie auch als Coefficienten von $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)}$ u. s. w., deren höheren Potenzen und Producten. Aehnlich ist es bei den übrigen Gliedern von A, so daß dieser Ausdruck die Form annimmt

$$a + by^{(n)} + cy^{(n+1)} + \ldots + dy^{(2n\mp1)} + ey^{(n)^2} + fy^{(n)^3} + \ldots + gy^{(n)}y^{(n+1)} + \ldots$$

wo a, b, c ... von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung sind, und der identisch nur verschwinden kann, wenn

$$a = o,\ b = o,\ c = o,\ \ldots\ d = o,\ e = o,\ \ldots$$

sind, die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen ist aber bei weitem größer als n, und es ist demnach zu zeigen, wie dieselben auf die von Lagrange angegebene Anzahl sich reduciren.

§. 2.

Lehrsatz 1. Wenn f von der Form $p + qy^{(n)}$ ist, so enthält A den Differentialquotienten $y^{(2n\mp1)}$ nicht, oder ist nur von der $(2n-2)^{ten}$ Ordnung.

Wollte man, um A zu erhalten, die einzelnen Glieder dieses Ausdrucks berechnen, und sie dann mit gehörigem Zeichen addiren, so würde man zu fast unübersehbaren Rechnungen kommen. Leichter ersieht man die Zusammensetzungen A, indem man folgende Reihe von Größen bildet.

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = l \\
&\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{dl}{dx} = l_1 \\
&\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{dl_1}{dx} = l_2 \\
&\qquad\vdots \\
&\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{dl_{(n-1)}}{dx} = l_n
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Offenbar finden hier folgende Gleichungen ſtatt

$$l_2 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)}{dx^2}$$

$$l_3 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}} - \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right)}{dx^2} - \frac{d^3\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)}{dx^3}$$

$$\vdots$$

$$l_n = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)}{dx^2} - \ldots\ldots (-1)^n \frac{d^n\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)}{dx^n} = A\,.$$

Da ferner $= p + qy^{(n)}$, ſo hat man $l = q$ und

$$l_1 = \frac{\partial(p + qy^{(n)})}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{dq}{dx} = \frac{\partial p}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial q}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} - \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} y' - \frac{\partial q}{\partial y'} y'' - \ldots$$
$$- \frac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} - \frac{\partial q}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}\,.$$

$$= \frac{\partial p}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} y' - \frac{\partial q}{\partial y'} y'' - \ldots - \frac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)}\,.$$

Hieraus ergiebt ſich, daß $y^{(n)}$ in l_1 nicht vorkömmt. Man gelangt aber von l_1 zu l_n oder A, indem man $n-1$ vollſtändige Differentiationen nach einander anbringt, alſo iſt der höchſte in A vorkommende Differentialquotient $y^{(2n-2)}$, wie behauptet wurde.

Aus dem Werthe von l_1 ſieht man, daß die übrigen Größen l folgende Form annehmen müſſen

Digitized by Google

$$l_2 = a^{(n-2)} + b^{(n-2)} y^{(n)}$$

$$l_3 = a^{(n-3)} + b^{(n-3)} y^{(n)} + b_1{}^{(n-3)} y^{(n+1)} + t^{(n-3)}$$

$$\vdots$$

$$l_{n-2} = a'' + b'' y^{(n)} + b''_1 y^{(n+1)} + b''_2 . y^{(n+2)} + \ldots + b''_{n-4} y^{(2n-4)} + t''$$

$$l_{n-1} = a' + b' y^{(n)} + b'_1 y^{(n+1)} + b'_2 y^{(n+2)} + \ldots + b'_{n-4} y^{(2n-4)} + b'_{n-3} y^{(2n-3)} + t'$$

$$l_n = a + b y^{(n)} + b_1 y^{(n+1)} + b_2 y^{(n+2)} + \ldots + b_{n-4} y^{(2n-4)} + b_{n-3} y^{(2n-3)} + b_{n-2} y^{(2n-2)} + t ,$$

wo die mit a und b bezeichneten Größen von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, die Ausdrücke $t^{(n-3)}, \ldots t'', t', t$ aber die Complexe derjenigen Glieder sind, welche $y^{(n)}, y^{(n+1)}$ u. s. w. nicht linear enthalten. Da nun

$$l_n = \frac{\partial (p + q y^{(n)})}{dy} - \frac{dl_{n-1}}{dx} ,$$

so ist ersichtlich, daß folgende Relationen statt finden

$$b_1 = - b' - \frac{\partial b'_1}{\partial x} - \frac{\partial b'_1}{\partial y} y' - \frac{\partial b'_1}{\partial y} y'' - \ldots - \frac{\partial b'_1}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)}$$

$$b_2 = - b'_1 - \frac{\partial b'_2}{\partial x} - \frac{\partial b'_2}{\partial y} y' - \frac{\partial b'_2}{\partial y'} y'' - \ldots - \frac{\partial b'_2}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)}$$

$$b_{n-3} = - b_{n-4} - \frac{\partial b_{n-3}}{\partial x} - \frac{\partial b_{n-3}}{\partial y} y' - \frac{\partial b_{n-3}}{\partial y'} y'' - \ldots - \frac{\partial b_{n-3}}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)}$$

$$b_{n-2} = - b'_{n-3} .$$

Sind demnach die Größen $b_1, b_2 \ldots b_{n-2}$ identisch $= o$, so ist dasselbe auch mit den Größen $b', b'_1, b'_2 \ldots b'_{n-3}$ der Fall, und unter derselben Voraussetzung ergiebt sich, indem man auf dieselbe Weise rückwärts schließt

$$b''_{n-4} = o , \quad b''_{n-5} = o \ldots b''_2 = o , \quad b''_1 = o , \quad b'' = o ,$$

$$b'''_{n-5} = o \ldots . b'''_2 = o , \quad b'''_1 = o , \quad b''' = o ,$$

$$\vdots$$

$$b_2{}^{(n-4)} = o , \quad b_1{}^{(n-4)} = o , \quad b^{(n-4)} = o ,$$

$$b_1{}^{(n-3)} = o , \quad b^{(n-3)} = o ,$$

$$b^{(n-2)} = o .$$

Was aber die Ausdrücke $t^{(n-3)}, t^{(n-2)}, \ldots t', t$ anbetrifft, so sind die Coefficienten

Digitized by Google

der in ihnen enthaltenen Glieder die partiellen Differentialquotienten der Größen b nach den Größen y genommen; so ist z. B.

$$t^{(n-3)} = -y^n \cdot \frac{\partial b^{(n-2)}}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}$$

$$t^{(n-2)} = -y^{(n)} \left(\frac{\partial b^{(n-3)}}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} + \frac{\partial b_1^{(n-3)}}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n+1)} \right) - \frac{dt^{(n-3)}}{dx}$$

$$\vdots$$

$$t = -y^{(n)} \left(\frac{\partial b'}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} + \frac{\partial b'_1}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n+1)} + \ldots + \frac{\partial b'^{(n-3)}}{\partial y^{(n-1)}} y^{2n-3} \right) - \frac{dt'}{dx} .$$

Die Complexe t verschwinden also ebenfalls mit den Ausdrücken b, und wir haben somit folgenden

Lehrsatz 2. Der Ausdruck

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)}{dx^2} - \ldots (-1)^n \frac{d^n\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)}{dx^n}$$

geht für $f = p + qy^{(n)}$ in die Form über

$$a + by^{(n)} + b_1 y^{(n+1)} + \ldots . b_{n-2} y^{(2n-2)} + t ,$$

wo p, q, a, b, $b_1 \ldots b_{n-2}$ von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung sind, t aber alle in Bezug auf $y^{(n)}$, $y^{(n+1)} \ldots y^{(2n-3)}$ nicht linearen Glieder enthält; es hat die Eigenschaft, wenn b_1, b_2, ... b_{n-2} identisch verschwinden, es ebenfalls zu thun.

Mit Beibehaltung der oben gebrauchten Bezeichnungen hat man hieraus den

Lehrsatz 3. Ist $f = p + qy^{(n)}$ eine solche Function von x, y, y', ... $y^{(n)}$, daß $(p + qy^{(n)})dx$ von selbst integrabel wird, so muß sie den Bedingungen

$$a = o, \quad b = o, \quad b_1 = o, \ldots . \quad b_{n-2} = o$$

genügen; und umgekehrt.

Diese beiden Lehrsätze enthalten die von Lagrange gemeinte Zerlegung der Eulerschen Formel. Was diese selbst anbetrifft, so kann sie ähnlicherweise für eine symbolische angesehen werden, wie in der Mechanik das Princip der virtuellen Geschwindigkeit, das die einzelnen Gleichgewichtsbedingungen giebt, wenn man die Coefficienten der unabhängigen Variationen = o setzt.

§. 3.

Ein System von Gleichungen kann auf verschiedene Weise transformirt werden, ohne daß es seine eigentliche Bedeutung verliert; und so wollen wir an die Stelle der

Digitized by Google

eben angegebenen Bedingungsgleichungen andere von größerer Eleganz setzen. Zu diesem Zwecke bilden wir die nachher noch oft gebrauchten Ausdrücke:

$$(3)\quad \begin{cases} q_1 = \frac{\partial p}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} y' - \ldots - \frac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)}, \\ q_2 = \frac{\partial p}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{\partial q_1}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} y' - \ldots - \frac{\partial q_1}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)}, \\ \vdots \\ q_{n-1} = \frac{\partial p}{\partial y'} - \frac{\partial q_{n-2}}{\partial x} - \frac{\partial q_{n-2}}{\partial y} y' - \ldots - \frac{\partial q_{n-2}}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)}, \\ q_n = \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial x} - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y} y' - \ldots - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)}. \end{cases}$$

Lehrsatz 4. Finden die n Gleichungen statt

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{\partial q_1}{\partial y^{(n-1)}} = 0, \\ \frac{\partial q}{\partial y^{(n-3)}} - \frac{\partial q_2}{\partial y^{(n-1)}} = 0, \\ \frac{\partial q}{\partial y^{(n-4)}} - \frac{\partial q_3}{\partial y^{(n-1)}} = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(n-1)}} = 0. \\ q_n = 0. \end{cases}$$

so verschwindet A und $(p + qy^{(n)})\,dx$ ist demnach an und für sich integrabel. In der That haben wir oben gefunden

$$l_1 = \frac{\partial p}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} y' - \ldots - \frac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} = q_1;$$

hieraus folgt

$$l_2 = \frac{\partial (p + qy^{(n)})}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{dq_1}{dx} = \frac{\partial p}{\partial q^{(n-2)}} - \frac{\partial q_1}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} y' - \ldots - \frac{\partial y_1}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} + y^{(n)} \left(\frac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{\partial q_1}{\partial y^{(n-1)}} \right).$$

$$= q_2 + y^{(n)} \left(\frac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{\partial q_1}{\partial y^{(n-1)}} \right).$$

Digitized by Google

Findet die erste der Gleichungen (4) statt, so reducirt sich l_2 auf q_2 und man findet jetzt ganz ähnlich

$$l_3 = q_3 + y^{(n)}\left(\frac{\partial q}{\partial y^{(n-3)}} - \frac{\partial q_2}{\partial y^{(n-1)}}\right)$$

oder in Erwägung der zweiten Gleichung aus (4) $l_3 = q_3$. Fährt man auf diese Weise fort, so gelangt man schließlich zu

$$A = l_n = q_n + y^n\left(\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial q^{n-1}}{\partial y^{(n-1)}}\right),$$

oder mit Berücksichtigung der beiden letzten Gleichungen in (4) zu $A = 0$; was zu erweisen war. — Es ist nicht schwierig den Zusammenhaug der Gleichungen (4) mit denen des Lehrsatzes (3) aufzufinden.

Als Beispiel fügen wir die zu dem Falle $n = 3$ gehörigen Formeln bei. Hier ist

$f = p + qy'''$; p und q sind von der zweiten Ordnung

$$\frac{\partial p}{\partial q''} - \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y}y' - \frac{\partial q}{\partial y'}y'' = q_1$$

$$\frac{\partial p}{\partial y'} - \frac{\partial q_1}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y}y' - \frac{\partial q_1}{\partial y'}y'' = q_2$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_2}{\partial q'}y' - \frac{\partial q_2}{\partial q'}y'' = q_3$$

Die Integrabilitätsbedingungen sind

$$\frac{\partial q}{\partial y'} - \frac{\partial q_1}{\partial y''} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial q_2}{\partial y''} = 0$$

$$q_3 = 0.$$

Für A erhält man den Ausdruck

$$A = q_3 + y'''\left\{\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial q_2}{\partial q''} - \frac{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial y'} - \frac{\partial q_1}{\partial y''}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial y'} - \frac{\partial q_1}{\partial y''}\right)}{\partial y}y' - \frac{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial y'} - \frac{\partial q'}{\partial y''}\right)}{\partial y'}y''\right\}$$

$$- y''''\left(\frac{\partial q}{\partial y'} - \frac{\partial q_1}{\partial y''}\right) - y'''^2\frac{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial y_1} - \frac{\partial q_1}{\partial y''}\right)}{\partial y''}.$$

Ist $n = 4$ oder größer, so wird A, selbst nach Einführung der Größen q außerordentlich

Digitized by Google

complicirt, während die aus (4) sich ergebenden Bedingungsgleichungen ihre Einfachheit und Symmetrie behalten.

§. 4.

Nach Erledigung dieser Untersuchung, die sich an die erwähnte Stelle der Leçons anschließt, entsteht die schwierigere Frage, ob die gefundenen n Bedingungsgleichungen von einander unabhängig, oder einige die Folge der andern sind. Für Gleichungen, aus welchen die Werthe unbekannter Größen zu bestimmen sind, läßt sich im Allgemeinen dieß immer entscheiden. Sind z. B. $Z_1 = 0$, $Z_2 = 0$, $Z_3 = 0$ drei nicht unabhängige Gleichungen zwischen den unbekannten Größen z_1, z_2, z_3, so muß also eine Relation von der Form

$$Z_1 = \varphi(Z_2, Z_3)$$

stattfinden. Durch Differentiation ergiebt sich

$$\frac{\partial Z_1}{\partial z_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial z_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial Z_3}\frac{\partial Z_3}{\partial z_1}$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial z_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial z_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial Z_3}\frac{\partial Z_3}{\partial z_2}$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial z_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial z_3} + \frac{\partial \varphi}{\partial Z_3}\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}$$

und eliminirt man hieraus $\frac{\partial \varphi}{\partial Z_2}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial Z_3}$, so erhält man als Kennzeichen jener Abhängigkeit

$$\frac{\partial Z_1}{\partial z_1}\left(\frac{\partial Z_2}{\partial z_2}\frac{\partial Z_3}{\partial z_3} - \frac{\partial Z_2}{\partial z_3}\frac{\partial Z_3}{\partial z_2}\right) + \frac{\partial Z_1}{\partial z_2}\left(\frac{\partial Z_2}{\partial z_3}\frac{\partial Z_3}{\partial z_1} - \frac{\partial Z_2}{\partial z_1}\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}\right)$$
$$+ \frac{\partial Z_1}{\partial z_3}\left(\frac{\partial Z_2}{\partial z_1}\frac{\partial Z_3}{\partial z_2} - \frac{\partial Z_2}{\partial z_2}\frac{\partial Z_3}{\partial z_1}\right) = 0 .$$

Derartige Criterien giebt es aber für Bedingungleichungen, denen, wie man sich ausdrückt, identisch genügt werden muß, nicht, und es wird daher in jedem Falle einer solchen Untersuchung des besonderen Studiums der Bedingungsgleichungen bedürfen. In der That wird man weiter unten sehn, daß von den n Bedingungen des Lehrsatzes (3) oder (4) $\frac{n+1}{2}$ oder $\frac{n}{2}+1$, je nachdem n ungerade oder gerade ist, die übrigen nach sich ziehen. So sind für $n = 2$ und $n = 3$, 2 Bedingungsgleichungen, für $n = 4$ und $n = 5$ drei Gleichungen genügend. Diese gleiche Anzahl von Bedingungen für zwei aufeinander folgende Werthe von n tritt auch schon früher ein; es ist nämlich nur eine Bedingung erforderlich,

Digitized by Google

wenn f an und für sich integrabel sein soll, f mag die Form $\varphi(y, x)$ oder $\psi(y, x) + y'\chi(y, x)$ haben, das erste Mal nämlich muß $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$, und im zweiten Falle $\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\chi}{\partial x} = 0$ sein.

An diese Rechnungen knüpft sich auch die Integration des Ausdrucks $(p + qy^{(n)})\,dx$, wenn die Bedingungen (4) wirklich erfüllt sind, und hiermit erledigt sich auch eine zweite Untersuchung. Während es keine Schwierigkeit hat, nachzuweisen, daß wenn fdx an und für sich integrabel sein soll, $A = 0$ sein muß, so ist es durchaus nicht einfach zu zeigen, daß mit $A = 0$, fdx integrabel ist. Der Beweis dieser Umkehrung fällt durch das Folgende von selbst fort, da ein Ausdruck aufgestellt wird, dessen Differential fdx wird, wenn $A = 0$ erfüllt ist.

§. 5.

Den Fall $\lambda = o$ hat man ausgenommen die Gleichung

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial y}y' + \frac{\partial q_\alpha}{\partial y'}y'' + \ldots \frac{\partial q_\alpha}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)}\right)}{\partial y_\lambda} = \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y_\lambda}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial y_{(\lambda)}}{\partial y_\lambda}\right)}{\partial y}y'$$
$$+ \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y_{(\lambda)}}\right)}{\partial y'}y'' + \ldots + \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y_\lambda}\right)}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial y^{(\lambda-1)}} \quad (5)$$

oder zufolge (3)

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial p}{\partial y^{(n-\alpha-1)}} - q_{\alpha+1}\right)}{\partial y^{(\lambda)}} = \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y_\lambda}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y_{(\lambda)}}\right)}{\partial y}y' + \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y_\alpha}\right)}{\partial y'}y'' + \ldots$$
$$+ \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y^{(\lambda)}}\right)}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial y^{(\lambda-1)}} \quad (6)$$

Für den Ausnahmefall $\lambda = o$ hat man

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial p}{\partial y^{(n-\alpha-1)}} - q_{\alpha+1}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y^{(\lambda)}}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y^{(\lambda)}}\right)}{\partial y}y' + \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y^{(\lambda)}}\right)}{\partial y'}y'' + \ldots$$
$$+ \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y^{(\lambda)}}\right)}{\partial y^{(n-2)}}y^{(\lambda-1)}. \quad (7)$$

Setzen wir

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial y^{(n-\beta-1)}} - \frac{\partial q_\beta}{\partial y^{(n-\alpha-1)}} = (\alpha, \beta), \quad (8)$$

Digitized by Google

woraus von selbst folgt

$$(\alpha, \beta) = -(\beta, \alpha)$$
$$(\alpha, \alpha) = 0,$$

so erhält man aus der Formel (6), wenn $\beta = n-1$ ausgeschlossen bleibt

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial y}y' + \frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial y'}y'' + \ldots + \frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)} = \frac{\partial\left\{\frac{\partial p}{\partial y^{(n-\alpha-1)}} - q_{\alpha+1}\right\}}{\partial y^{(n-\beta-1)}}$$
$$- \frac{\partial q_\alpha}{\partial y^{(n-\beta-2)}} - \frac{\partial\left\{\frac{\partial p}{\partial y^{(n-\beta-1)}} - q_{\beta+1}\right\}}{\partial y^{(n-\alpha-1)}} + \frac{\partial q_\beta}{\partial y^{(n-\alpha-2)}},$$

oder

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial x} + y'\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial y} + y''\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial y'} + \ldots + y^{(n-1}\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial y^{(n-2)}}$$
$$= -\left(\frac{\partial q_{\alpha+1}}{\partial y^{(n-\beta-1)}} - \frac{\partial q_\beta}{\partial y^{(n-\alpha-2)}}\right) - \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y^{(n-\beta-2)}} - \frac{\partial q_{\beta+1}}{\partial y^{(n-\alpha-1)}}\right).$$

Für den Fall $\beta = n-1$ ergiebt sich

$$\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial x} + y'\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial y} + y''\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial y'} + \ldots + y^{(n-1)}\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial y^{(n-2)}}$$
$$= \frac{\partial\left\{\frac{\partial p}{\partial y^{(n-\alpha-1)}} - q_{\alpha+1}\right\}}{\partial y} - \frac{\left\{\frac{\partial q}{\partial y} - q_n\right\}}{\partial y^{(n-\alpha-1)}} + \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(n-\alpha-2)}},$$

oder

$$\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial x} + y'\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial y} + y''\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial y'} + \ldots + y^{(n+1)}\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial y^{(n-2)}}$$
$$= -\left\{\frac{\partial q_{\alpha+1}}{\partial y} - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(n-\alpha-2)}}\right\} + \frac{\partial q_n}{\partial y^{(n-\alpha-2)}}.$$

Somit haben wir für die benachbarten Funktionen (α,β), $(\alpha+1,\beta)$, $(\alpha,\beta+1)$ die Gleichungen erhalten

(9) $$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial x} + y'\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial y} + y''\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial y'} + \ldots + y^{(n-1)}\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial y^{(n-2)}} = -(\alpha+1,\beta)$$
$$-(\alpha,\beta+1) \quad \begin{cases}\beta < n-1\\ \alpha < n-1\end{cases},$$

(10) $$\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial x} + y'\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial y} + y''\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial y'} + \ldots + y^{(n-1)}\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial y^{(n-2)}}$$
$$= -(\alpha+1,n-1) + \frac{\partial q_n}{\partial y^{(n-\alpha-1)}}; \quad \alpha < n-1.$$

Digitized by Google

Da $(\alpha+1, \alpha+1)=0$ ist, so folgt noch aus (9)

$$(11)\quad \frac{\partial(\alpha,\alpha+1)}{\partial x}+y'\frac{\partial(\alpha,\alpha+1)}{\partial y}+y''\frac{\partial(\alpha,\alpha+1)}{\partial y'}+\ldots+y^{(n-1)}\frac{\partial(\alpha,\alpha+1)}{\partial y^{(n-2)}}$$
$$=-(\alpha,\alpha+2).$$

Mit Hülfe dieser einfachen Formeln findet man, daß sämmtliche Ausdrücke (α, β) oder das System von Größen

$$\begin{array}{llll}(0,1)&&&\\(0,2)&(1,2)&&\\(0,3)&(1,3)&(2,3)&\\\vdots&\vdots&\vdots&\\(0,n-1)&(1,n-1)&(2,n-1)\ldots.&(n-3,n-1)\ (n-2,n-1)\end{array}$$

verschwindet, sobald

$$(0,1),\ 0,2),\ (0,3)\ldots..\ (0,n-1),\ q_n$$

verschwinden, oder mit andern Worten, wenn die Integrabilitätsbedingungen des Lehrsatzes (4), welche sich

$$(12)\quad (0,1)=0,\ (0,2)=0,\ (0,3)=0,\ \ldots\ (0,n-1)=0,\ q_n=0$$

schreiben lassen, erfüllt sind.

Es folgt nämlich vermittelst

$$\begin{array}{lll}&(11)\ \text{aus}\ (0,1)=0\ \text{die Gleichung}\ (0,2)=0\\\ldots\ldots\ldots&(9)\ \ldots.&(0,2)=0,\ \ldots\ldots\ldots\ (0,3)+(1,2)=0\\\ldots\ldots\ldots&(9)\ \ldots.&(0,3)=0,\ \ldots\ldots\ldots\ (0,4)+(1,3)=0\\&&\vdots\\\ldots\ldots\ldots&(9)\ \ldots.&(0,n-2)=0,\ldots\ldots\ldots\ (0,n-1)+(1,n-2)=0\\\ldots\ldots\ldots&(10)\ \ldots.&(0,n-1)=0,\ldots\ldots\ldots\ -\frac{\partial q_n}{\partial y^{(n-1)}}+(1,n-1)=0.\end{array}$$

Da aber die ersten Theile der gefolgerten Gleichung schon nach der Voraussetzung $=0$ sind, so erhält man

$$(1,2)=0,\ (1,3)=0,\ (1,4)=0\ldots,\ (1,n-1)=0.$$

Digitized by Google

Ganz ebenso erschließt man hieraus

$$(2,3)=0,\ (2,4)=0\ldots.,\ (2,n-2)=0,\ (2,n-1)=0$$
$$(3,4)=0\ldots.,\ (3,n-2)=0,\ (3,n-1)=0,\ \text{und sofort bis}$$
$$(n-3,n-2)=0,\ (n-3,n-1)=0$$
$$(n-2,n-1)=0.$$

Das eben gewonnene Resultat läßt sich aber noch auf eine andere Art aussprechen, welche wir jetzt näher erörtern wollen.

§. 6.

Denkt man sich unter $y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ ganz unabhängige Größen, so ist der Differentialausdruck

$$q\partial y^{(n-1)} + q_1\partial y^{(n-2)} + q_2\partial y^{(n-3)} + \ldots + q_{n-1}\partial y$$

das genaue Differential einer Funktion dieser Größen, wenn sämmtliche Größen (α, β) verschwinden. Man kann alsdann n Funktionen $F, F_1, F_2 \ldots F_{n-1}$ bestimmen, dergestalt, daß, wenn

$$W = F + F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-1} \text{ ist,}$$

$$\partial W = q\partial y^{(n-1)} + q_1\partial y^{(n-2)} + q_2\partial y^{(n-3)} + \ldots + q_{n-1}\partial y$$

wird. Die Funktionen F bestimmen sich durch die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} = q$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y^{(n-2)}} = q_1 - \frac{\partial F}{\partial y^{(n-2)}}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y^{(n-3)}} = q_n - \frac{\partial (F+F_1)}{\partial y^{(n-3)}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F_{n-1}}{\partial y} = q_{n-1} - \frac{\partial (F+F_1+\ldots F_{n-2})}{\partial y},$$

und was die bei jeder Quadratur hinzuzufügende Constante anbetrifft, so ist diese für

F eine willkührliche Funktion von $y, y', \ldots y^{(n-3)}, y^{(n-2)}$;
F_1 " " " " $y, y', \ldots y^{(n-3)}$;
F_2 " " " " $y, y', \ldots y^{(n-4)}$;
F_{n-2} " " " " y;
F_{n-1} " " Constante.

Digitized by Google

Es ist nicht schwierig, die Verträglichkeit aller dieser Bestimmungen nachzuweisen; das Einzelne dieses Nachweises wird hier um so weniger anzugeben sein, als es sich in mehreren Werken findet und in aller Kürze in einer Abhandlung des Herrn Professor Jacobi über Differentialgleichungen (Crelle's Journal für Mathematik, Bd. 23. S. 94.) auseinandergesetzt ist.

Das Resultat des vorigen Paragraphen läßt sich also auch so wiedeegeben:

Sind die Bedingungen (12) erfüllt, so giebt es eine Funktion W der n Größen y, y', y'' ... $y^{(n-1)}$, deren vollständiges nach diesen Größen genommenes Differential

$$q\partial y^{(n-1)} + q_1\partial y^{(n-2)} + q_2\partial y^{(n-3)} + \ldots + q_{n-1}\partial y$$

ist. Von x ist hierbei nie die Rede gewesen, und es wird, während der Auffindung von W als Constante betrachtet.

Ist nun W gefunden, so erhält man, wenn die Bedeutung der Größen y, y', y'', ... $y^{(n-1)}$ als Differentialquotienten wieder aufgenommen und ihre Unabhängigkeit fallen gelassen wird, für das vollständige Differential von W

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y}y' + \frac{\partial W}{\partial y'}y'' + \ldots + \frac{\partial W}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)} + \frac{\partial W}{\partial y^{(n-1)}}y^{(n)}$$

oder, weil

$$\frac{\partial W}{\partial y} = q_{n-1},\ \frac{\partial W}{\partial y'} = q_{n-2},\ \ldots\ \frac{\partial W}{\partial y^{(n-1)}} = q,$$

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\partial W}{\partial x} + q_{n-1}y' + q_{n-2}y'' + \ldots + q_1y^{(n-1)} + qy^{(n)},$$

also

$$\frac{dW}{dx} - (p + qy^{(n)}) = \frac{\partial W}{\partial x} + q_{n-1}y' + q_{n-2}y'' + \ldots + q_1y^{(n-1)} - p.$$

Nennen wir X diesen Werth von $\frac{dW}{dx} - (p + qy^{(n)})$, so läßt sich zeigen, daß X die Größen y, y', y'', ... $y^{(n-1)}$ nicht enthält, und also nur eine Funktion von x allein ist.

In der That erhält man

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y} + \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y}y' + \frac{\partial q_{n-2}}{\partial q}y'' + \ldots + \frac{\partial q_1}{\partial y}y^{(n-1)} - \frac{\partial p}{\partial y},$$

und weil

$$\frac{\partial W}{\partial x} = q_{n-1},\ \frac{\partial p}{\partial y} = -q_n - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial x} - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y}y' - \ldots - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)},$$

Digitized by Google

so wird

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -q_n + y''\left(\frac{\partial q_{n-2}}{\partial q} - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial q'}\right) + y'''\left(\frac{\partial q_{n-3}}{\partial q} - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y''}\right) + \ldots + y^{(n-1)}\left(\frac{\partial q_1}{\partial y} - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(n-2)}}\right)$$

$$= -q_n + y''(n-2, n-1) + y'''(n-3, n-1) + \ldots + y^{(n-1)}(1, n-1);$$

oder da q_n und sämmtliche Größen $(\alpha, \beta) = 0$ sind, so ist

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 0,$$

d. h. X enthält y nicht. Aehnlich erhält man

$$\frac{\partial X}{\partial y^{(\alpha)}} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y^{(\alpha)}} + \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(\alpha)}} y' + \frac{\partial q_{n-2}}{\partial q^{(\alpha)}} y'' + \ldots + \frac{\partial q_1}{\partial y^{(\alpha)}} + q_{n-\alpha} - \frac{\partial p}{\partial y^{(\alpha)}},$$

oder weil

$$\frac{\partial W}{\partial q^{(\alpha)}} = q_{n-\alpha-1},$$

und

$$q_{n-\alpha} - \frac{\partial p}{\partial y^{(\alpha)}} = -\frac{\partial q_{n-\alpha-1}}{\partial x} - \frac{\partial q_{n-\alpha-1}}{\partial y} y' - \ldots - \frac{\partial q_{n-\alpha-1}}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)},$$

so hat man

$$\frac{\partial X}{\partial y^{(\alpha)}} = y'(n-1, n-\alpha-1) + y''(n-2, n-\alpha-1) + \ldots + y^{(n-1)}(1, n-\alpha-1);$$

also nach den oben erwähnten Gründen

$$\frac{\partial X}{\partial y^{(\alpha)}} = 0;$$

d. h. X enthält auch keinen der Differentialquotienten von z. Hat man demnach W gefunden, und X bestimmt, wozu es keiner Integration mehr bedarf, so erhält man

$$p + qy^{(n)} = \frac{dW}{dx} - X,$$ woraus durch eine neue Quadratur

$$\int (p + qy^{(n)}) dx = W - \int X dx;$$

eine der Quadraturgränzen ist x selbst. Wir sehen also in der That, daß wenn die Integrabilitätsbedingungen (12) erfüllt sind, $p + qy^{(n)}$ das genaue Differential eines andern Ausdrucks ist nämlich der Größe $W - \int_a^x X dx$; und dies giebt zugleich die Rechtfertigung der in Paragraph (4) erwähnten Umkehrung.

Digitized by Google

§. 7.

Wir gehen jetzt zur Reduction der Anzahl der Bedingungsgleichungen, und wollen hierbei der Kürze halber denjenigen Theil des vollständigen Differentials einer Funktion φ der Größen $x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$, welcher selbst die $(n-1)$te Ordnung nicht übersteigt durch die Charakteristik δ bezeichnen, so daß

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial\varphi}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)},$$

$$\delta^2\varphi = \delta(\delta\varphi) = \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\delta\varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial\delta\varphi}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial\delta\varphi}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)},$$

u. s. w.

so daß $\delta^m\varphi$ entsprechender Weise denjenigen Theil von $\frac{d^m\varphi}{dx^m}$ bezeichnet, welcher $y^{(n)}$ und die höheren Differentialquotienten nicht enthält. Wir können alsdann die Gleichungen (9), (10) und (11) des §. 5. schreiben:

$$\left.\begin{aligned} -\delta(\alpha, \beta) &= (\alpha+1, \beta) + (\alpha, \beta+1) \\ -\delta(\alpha, n-1) &= (\alpha+1, n-1) + \frac{\partial q_n}{\partial y^{(n-\alpha-1)}} \\ -\delta(\alpha, \alpha+1) &= +\overset{+}{(\alpha}, \alpha+2). \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Betrachten wir jetzt der Einfachheit halber das System von Ausdrücken

$$\begin{array}{ll} (0,1) & \\ (0,2) & (1,2) \\ (0,3) & (1,3) \\ (0,4) & \end{array}$$

von denen die vier der ersten Verticalreihe $=0$ gesetzt die vier ersten unserer Bedingungsgleichungen geben, aus denen nachher das Verschwinden der beiden andern von selbst sich ergiebt. Wir haben vermöge (13)

$$\begin{array}{ll} (0,2) = -\delta(0,1) & \\ (1,2) + (0,3) = -\delta(0,2) & \\ (1,3) + (0,4) = -\delta(0,3) & \\ (1,3) = -\delta(1,2) & \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{lll} (0,1) & & \\ -\delta(0,1) & & (1,2) \\ +\delta^2(0,1) - (1,2) & & -\delta(1,2) \\ -\delta^3(0,1) + 2\delta(1,2). & & \end{array}$$

statt der vorhergehenden 6 Ausdrücke (14). Hieraus ergiebt sich, daß die Gleichung $(0,1) = 0$, die zweite $(0,2) = 0$ nach sich zieht. Die Gleichung $(0,3) = 0$, welche durch das Vorhergehende in $\delta^2(0,1) - (1,2) = 0$ verwandelt ist, giebt wenn $(0,1) = 0$ ist, auch

Digitized by Google

$(1,2)=0$, und da $(0,4)$ aus $(0,1)$ und $(1,2)$ zusammengesetzt ist, auch $(0,4)=0$. Wir sehen also, daß die beiden Gleichungen

$$(0,1)=0,\ (0,3)=0$$

die beiden andern $(0,2)=0$, $(0,4)=0$ schon in sich begreifen; andererseits sieht man aber auch, daß an die Stelle von $(0,1)=0$, $(0,3)=0$, die beiden Gleichungen $(0,1)=0$ und $(1,2)=0$ gesetzt werden können und dasselbe leisten. Ebenso sind die 12 Ausdrücke

$$\begin{array}{lll} (0,1) & & \\ (0,2) & (1,2) & \\ (0,3) & (1,3) & (2,3) \\ (0,4) & (1,4) & (2,4) \\ (0,5) & (1,5) & \\ (0,6) & & \end{array}$$

ganz identisch mit den folgenden

$$\begin{array}{lll} (0,1) & & \\ -\delta(0,1) & (1,2) & \\ +\delta^2(0,1)-(1,2) & -\delta(1,2) & (2,3) \\ -\delta^3(0,1)+\delta(1,2) & +\delta^2(1,2)-(2,3) & -\delta(2,3) \\ +\delta^4(0,1)-3\delta^2(1,2)+(2,3) & -\delta^3(1,2)+2(2,3) & \\ -\delta^5(0,1)+4\delta^3(1,2)-3\delta(2,3) & & \end{array}$$

und eben so wie vorhin, werden die Gleichungen

$$(0,1)=0,\ (0,2)=0,\ (0,3)=0,\ (0,4)=0,\ (0,5)=0,\ (0,6)=0,$$

vollständig ersetzt durch die 3 Gleichungen

$$(0,1)=0,\ (0,3)=0,\ (0,5)=0,$$

oder durch die 3 Gleichungen

$$(0,1)=0,\ (1,2)=0,\ (2,3)=0.$$

Es läßt sich allgemein beweisen, daß wenn $m=$ oder $<\frac{n-1}{2}$ ist die $(m+1)\,m$ Größen

$$\begin{array}{c} (m-1,m)\ (m-1,m+1) \\ (m-2,m-1)\ (m-2,m)\ (m-2,m+1)\ (m-2,m+2) \\ \vdots \\ (1,2)\ldots(1,m-1)\ (1,m)\ (1,m+1)\ (1,m+2)\ldots(1,2m-1) \\ (0,1)\ (0,2)\ldots(0,m-1)\ (0,m)\ (0,m+1)\ (0,m+2)\ldots(0,2m-1)\ldots(0,2m), \end{array}$$

Digitized by Google

sowohl durch die m Größen

$$(0, 1),\ (0, 3) \ldots (0, 2m-1)$$

als auch durch die m Größen

$$(0, 1),\ (1, 2) \ldots (m-1, m)$$

ausgedrückt werden können, dergestalt daß die 2m Bedingungsgleichungen

$$(0, 1) = 0,\ (0, 2) = 0, \ldots (0, 2m) = 0$$

durch m von ihnen, nämlich durch

$$(0, 1) = 0,\ (0, 3) = 0,\ (0, 5) = 0, \ldots (0, 2m-1) = 0$$

oder durch die erste von ihnen, und (m — 1) neue, nämlich durch

$$(0, 1) = 0,\ (1, 2) = 0,\ (2, 3) = 0, \ldots (m-1, m) = 0$$

durchaus ersetzt werden.

Wir können für (0, l) die Form annehmen

$$14)\quad (0, l) = (-1)^{l-1}\left\{\delta^{l-1}(0, 1) - B_1^l \delta^{l-3}(1, 2) + B_2^l \delta^{l-5}(2, 3) - B_3^l \delta^{l-7}(3, 4) + \ldots\right\}$$

woraus

$$(0, l-1) = -(-1)^{l-1}\left\{\delta^{l-2}(0, 1) - B_1^{l-1}\delta^{l-4}(1, 2) + B_2^{l-1}\delta^{l-6}(2, 3) - B_3^{l-1}\delta^{l-8}(3, 4) + \ldots\right\}$$

Die Größen B sind von l abhängige noch zu bestimmende Coefficienten. Die Coefficienten in (1, l — 1) werden aber ganz dieselben wie in (0, l — 2), also erhält man

$$(1, l-1) = (-1)^{l-1}\left\{\delta^{l-3}(1, 2) - B_1^{l-2}\delta^{l-5}(2, 3) + B_2^{l-2}\delta^{l-7}(3, 4) - B_3^{l-2}\delta^{l-9}(4, 5) + \ldots\right\}$$

Erinnert man sich jetzt, daß nach Formel (13)

$$-\delta(0, l-1) = (0, l) + (1, l-1)$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
&\delta^{l-1}(0, 1) - B_1^{l-1}\delta^{l-3}(1, 2) + B_2^{l-1}\delta^{l-5}(2, 3) - B_3^{l-1}\delta^{l-7}(3, 4) + \ldots \\
&= \delta^{l-1}(0, 1) - B_1^l \delta^{(l-3)}(1, 2) + B_2^l \delta^{(l-5)}(2, 3) - B_3^l \delta^{l-7}(3, 4) + \ldots \\
&\quad + \delta^{(l-3)}(1, 2) - B_1^{l-2}\delta^{(l-5)}(2, 3) + B_2^{l-2}\delta^{l-7}(3, 4) - \ldots;
\end{aligned}$$

woraus durch Vergleichung der Coefficienten sich ergiebt

$$B_1^l = B_1^{l-1} + 1$$

$$B_2^l = B_2^{l-1} + B_1^{l-2}$$

$$B_3^l = B_3^{l-1} + B_2^{l-2} \text{ und allgemein } B_k^l = B_k^{l-2} + B_{k-1}^{l-2}.$$

Digitized by Google

Außerdem ist noch zu bemerken, daß $B_k^{2k} = 0$, $B^{2k-1} = 0$, u. s. w.; wie daraus zu ersehen, daß der in (14) zu jedem δ beigefügte Index nie negativ werden darf. Um nun die Größen B zu finden, wäre die Gleichung

$$\varphi(k, l) = \varphi(k, l-1) + \varphi(k-1, l-2)$$

aufzulösen, und die darin vorkommenden Constanten sind dann so zu bestimmen, daß sie der Gleichung $\varphi(k, 2k) = 0$ genügen. Man findet ohne Schwierigkeit, wenn

$$C_m^l = \frac{l(l+1)(l+2)\ldots(l+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m} \quad (15)$$

gesetzt wird

$$B_k^l = C_k^{l-2k}$$

wodurch (14) in folgende Gleichung übergeht,

$$(o,l) = (-1)^{l-1}\left\{\delta^{l-1}(o,1) - \frac{l-2}{1}\delta^{l-3}(1,2) + \frac{(l-4)(l-3)}{1 \cdot 2}\delta^{l-5}(2,3) - \frac{(l-6)(l-5)(l-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\delta^{l-7}(3,4) + \ldots\right\} \quad (16)$$

Für $l = 2m-1$ wird aus (16)

$$\left.\begin{aligned}(o,2m-1) &= \delta^{2m-2}(o,1) - C_1^{2m-3}\delta^{2m-4}(1,2) + \ldots\ldots + (-1)^{m-1}C_{m-1}^{1}(m-1,m)\\ -(o,2m) &= \delta^{2m-1}(o,1) - C_1^{2m-2}\delta^{2m-3}(1,2) + \ldots\ldots + (-1)^{m-1}C_{m-1}^{2}\delta(m-1,m)\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Es ist von Wichtigkeit, daß in dem Ausdrucke für $(o, 2m-1)$ die letzte Größe $(m-1, m)$ von keinem δ afficirt ist. Wir ersehen aus diesem Resultate erstlich, daß die $2m$ Größen $(o,1)$, $(o,2)$, $(o,3)\ldots(o,2m)$ durch die m Größen $(o,1)$, $(1,2)$, $(2,3)\ldots$ $(m-1, m)$, zweitens, daß aber auch diese letzteren durch die Größen der ungeraden Stelle $(o,1)$, $(o,3)$, $(o,5)\ldots(o,2m-1)$ ausgedrückt werden können. Daraus ist aber auch klar, daß es gleich vieler Größen bedarf, um $(o,1)$, $(o,2)\ldots\ldots$ bis $(o,2m-1)$ oder bis $(o,2m)$ ausdrücken.

Fassen wir dieß zusammen, so erhalten wir

Lehrsatz 5. Wenn die Gleichungen stattfinden

$$q_n = o, \frac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{dq_1}{\partial y^{(n-1)}} = o, \frac{\partial q}{\partial y^{(n-4)}} - \frac{dq_2}{\partial y^{(n-1)}} = o, \frac{dq}{\partial y^{(n-6)}} - \frac{\partial q_5}{\partial y^{(n-1)}} = o, \ldots$$

$$\text{bis } \frac{\partial q}{\partial y^1} - \frac{\partial q_{n-2}}{\partial y^{(n-1)}} = o, \text{ oder } \frac{\partial y}{\partial q} - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(n-1)}} = o,$$

je nachdem n ungerade oder gerade ist, so verschwindet der Ausdruck A, und die Formel $(p + qy^{(n)})dx$ ist an und für sich integrabel.

Digitized by Google

Lehrsatz 6. Wenn die Gleichungen statt finden

$$q_n = 0,\ \frac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{\partial q_1}{\partial y^{(n-1)}} = 0,\ \frac{\partial q_1}{\partial y^{(n-3)}} - \frac{\partial q_2}{\partial y^{(n-2)}} = 0,\ \frac{\partial q_2}{\partial y^{(n-4)}} - \frac{\partial q_3}{\partial y^{(n-3)}} = 0, \ldots$$

$$\text{bis } \frac{\partial q_{\frac{n-2}{2}}}{\partial y^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}} - \frac{\partial q_{\frac{n-1}{2}}}{\partial y^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}} = 0, \text{ oder } \frac{\partial q_{\frac{n-1}{2}}}{\partial y^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{\partial q_{\frac{n}{2}}}{\partial y^{\frac{n}{2}}} = 0,$$

je nachdem n ungerade oder gerade ist, so verschwindet der Ausdruck A, und die Formel $p + qy^{(n)}dx$ ist an und für sich integrabel.

In beiden Sätzen ist die Anzahl der Bedingungsgleichungen $\frac{n+1}{2}$ oder $\frac{n}{2}+1$, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Während hier die Integrabilitätsbedingungen aus der Eulerschen Formel abgeleitet wurden, kann man sie auch direct finden, was nicht weiter ausgeführt werden soll.

Digitized by Google

Jahresbericht

über die Königliche Realschule.

Das Wichtigste, was der Realschule im Laufe des verflossenen Jahres widerfahren ist, ist die Umwandlung seiner Elementarklassen in eine abgesonderte, für sich bestehende Anstalt unter dem Namen einer „Vorschule für die Realschule und das Friedrich-Wilhelms-Gymnasium". Es sei mir verstattet, die Veranlassung dieser Veränderung, den Zweck der Anstalt und ihre jetzige Verfassung näher auseinander zu setzen.

Unter der Leitung des Directors Spilleke seit dem Jahre 1821 hatte sich die Realschule von Jahr zu Jahr erweitert und zuletzt eine Ausdehnung gewonnen, welche sie vor allen ähnlichen Anstalten auszeichnete und die derselben zu Gebote stehenden Räume als völlig unzureichend erscheinen ließ. Nach und nach hatte sich Spilleke genöthigt gesehen, alle Lehrerwohnungen, mit Ausnahme einer einzigen, welche zu Klassenzimmern untauglich war, zum großen Nachtheil der Lehrer einzuziehen. Für die Töchterschule, die im Anfange seiner Wirksamkeit mit der eigentlichen Realschule in demselben Gebäude untergebracht war, wurde ein benachbartes Haus gewonnen, und damit eine ganz neue Anstalt gegründet, welche sich seitdem auf eine vorzügliche Weise entwickelte und zur größten Freude ihres Begründers gedieh. Beide Maßregeln genügten aber nicht zur Beschaffung des nöthigen Raumes für die Realschule. Kaum war, unter der eifrigen und umsichtigen Mitwirkung des Geheimen Staatsarchivars, Herrn Archivraths Köhne, ein Bedürfniß befriedigt und wie es schien, auf lange Zeit hin erfolgreich gesorgt worden, als sich schon herausstellte, daß eine neue Erweiterung nothwendig sein werde. Spilleke sah sich daher noch in der letzten Zeit seiner Wirksamkeit gezwungen, da das Realschulgebäude einem vermehrten Klassenbedürfniß nicht mehr genügte, drei Klassen in dem etwas entfernt gelegenen Gymnasialgebäude unterzubringen. Es konnte nicht fehlen, daß damit Uebelstände verbunden waren. Zwar fanden Lehrer und Schüler dort gern eine gastliche Aufnahme, aber sie fühlten sich fremd und gleichsam aus dem großen Zusammenhange, dem sie angehörten, gewaltsam herausgenommen; das Ganze der Anstalt war zerrissen; auch konnte eine genügende Aufsicht über diese abgesonderten Theile der Schule kaum geführt werden. So fand ich die Verhältnisse bei meinem Eintritt zu Ostern 1842; die Klagen der Lehrer über diesen Zustand traten mir sogleich entgegen; irgend eine Abhülfe war unumgänglich nöthig; durch einen Umbau des Realschulgebäudes, welches an sich für eine größere Anstalt nicht gut gewählt ist, konnte nach dem Rathe sachverständiger Männer nicht geholfen werden. Man mußte daher auf andere Mittel und Wege denken, und diese ergaben sich aus folgenden Umständen.

Dem Namen nach bestand die Realschule aus sieben Klassen, von Prima bis Septima; in Wahrheit aber war durch Parallelklassen und durch das Zerlegen der Klassen in eine obere und untere Abtheilung die Zahl derselben auf 16 gestiegen, von denen man annahm (s. z. B. Programm von 1840 S. 41), daß sie eine Oberschule, Prima, Obersecunda, Untersecunda, Obertertia, (zusammen 4 Klassen), eine Mittelschule, Untertertia, Oberquarta, Unterquarta, (mit den Parallelklassen zusammen 6 Klassen), und eine Elementarschule, Quinta, Sexta, Ober- und Unterseptima (mit

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

(2)

PROGRAMME

D'INVITATION

A

L'EXAMEN PUBLIC

DU

Berlin, Germany

COLLÉGE ROYAL FRANÇAIS,

FIXÉ

AU

29. SEPTEMBRE 1848.

CONTENU.

1. MÉMOIRE SUR LES SURFACES COURBES PAR *F. JOACHIMSTHAL.* (Ferdinand)
2. ÉTUDE SUR LES OEUVRES PHILOSOPHIQUES DE FRÉDÉRIC LE GRAND PAR *CH. DE LA HARPE.*
3. TABLEAU HISTORIQUE DU COLLÉGE PENDANT L'ANNÉE $18\frac{47}{48}$.

BERLIN.

IMPRIMÉ CHEZ J. F. STARCKE.

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRE SUR LES SURFACES COURBES

par
Ferdinand
F. Joachimsthal.

§. 1.

Dans les recherches suivantes sur les surfaces courbes je supposerai les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point de la surface exprimées par deux quantités variables p et q. Cela revient, comme on sait, à mener sur la surface deux systèmes de courbes qui correspondent aux deux équations

$$p = \text{à une const.} \qquad q = \text{à une const.}$$

et à déterminer chaque point de la surface comme l'intersection d'une courbe du premier système avec une courbe de l'autre. Pour abréger les calculs j'introduirai les désignations suivantes qui sont les mêmes que celles de Mr. Gauss, dans les „disquisitiones generales circa superficies curvas" de cet illustre Géomètre:

$$\frac{dx^2}{dp^2} + \frac{dy^2}{dp^2} + \frac{dz^2}{dp} = E \qquad \frac{dy}{dp}\frac{dz}{dq} - \frac{dy}{dq}\frac{dz}{dp} = A$$

$$\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq} + \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq} + \frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq} = F \qquad \frac{dz}{dp}\frac{dx}{dq} - \frac{dz}{dq}\frac{dx}{dp} = B$$

$$\frac{dx^2}{dq^2} + \frac{dy^2}{dq^2} + \frac{dz^2}{dq^2} = G. \qquad \frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq} - \frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp} = C.$$

$$A\frac{d^2x}{dp^2} + B\frac{d^2y}{dp^2} + C\frac{d^2z}{dp^2} = D$$

$$A\frac{d^2x}{dpdq} + B\frac{d^2y}{dpdq} + C\frac{d^2z}{dpdq} = D'$$

$$A\frac{d^2x}{dq^2} + B\frac{d^2y}{dq^2} + C\frac{d^2z}{dq^2} = D''.$$

Digitized by Google

J'ajoute les équations identiques, dont je me servirai très-souvent:

$$1.\quad \begin{cases} A\frac{dx}{dp} + B\frac{dy}{dp} + C\frac{dz}{dp} = o. \\ A\frac{dx}{dq} + B\frac{dy}{dq} + C\frac{dz}{dq} = o \end{cases}$$

$$2.\quad \begin{cases} \frac{dA}{dp}\frac{dx}{dp} + \frac{dB}{dq}\frac{dy}{dp} + \frac{dC}{dp}\frac{dz}{dp} = -D. \\ \frac{dA}{dq}\frac{dx}{dp} + \frac{dB}{dq}\frac{dy}{dp} + \frac{dC}{dq}\frac{dz}{dp} = -D'. \\ \frac{dA}{dp}\frac{dx}{dq} + \frac{dB}{dp}\frac{dy}{dq} + \frac{dC}{dp}\frac{dz}{dq} = -D' \\ \frac{dA}{dq}\frac{dx}{dq} + \frac{dB}{dq}\frac{dy}{dq} + \frac{dC}{dq}\frac{dz}{dq} = -D''; \end{cases}$$

d'où vient la relation curieuse

$$3.\quad DD''-D'^2 = A\left(\frac{dB}{dp}\frac{dC}{dq} - \frac{dB}{dq}\frac{dC}{dp}\right) + B\left(\frac{dC}{dp}\frac{dA}{dq} - \frac{dC}{dq}\frac{dA}{dp}\right) + C\left(\frac{dA}{dp}\frac{dB}{dq} - \frac{dA}{dq}\frac{dB}{dp}\right).$$

On trouve quelques unes des formules qui se rapportent à cette représentation des surfaces, dans le mémoire de Mr. Gauss que je viens de citer, et dans un petit ouvrage de Mr. Senff de Dorpat, intitulé „theoremata principalia e theoria curvarum et superficierum, Dorpat 1831." Je vais les indiquer rapidement.

Le plan tangent de la surface est donné par l'équation:

$$4.\quad A(\xi-x) + B(\eta-y) + C(\zeta-z) = o;$$

ξ, η, ζ étant les coordonnées courantes du plan.

Le rayon de courbure d'une section normale de la surface est égal à

$$5.\quad \rho = \sqrt{EG-F^2}\,\frac{Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2}{Ddp^2 + 2D'dpdq + D''dq^2};$$

le rapport $\frac{dq}{dp}$ étant donné par la direction de la tangente à la section normale. Les deux rayons de courbure d'une surface sont les racines de l'équation

$$6.\quad (DD''-D'^2)\rho^2 - \rho\sqrt{EG-F^2}(DG-2D'F+D''E) + (EG-F^2)^2 = o;$$

on la trouve très-aisément en partant de la formule (5); il en est de même de l'équation différentielle des lignes de courbure:

$$7.\quad (FD-ED')dp^2 + (GD-ED'')dpdq + (GD'-FD'')dq^2 = o.$$

Pour qu'un point de la surface soit un ombilic, il faut et il suffit que les deux conditions soient remplies:

$$8.\quad \frac{E}{D} = \frac{F}{D'} = \frac{G}{D''}.$$

Digitized by Google

Après avoir réuni les formules nécessaires aux développements suivants, je vais entrer en matière.

Corollaire 1er. La condition qui rend égales les deux racines de l'équation 6, est

$$9.\quad (DG-2D'F+D''E)^2-4(EG-F^2)(DD''-D'^2)=0,$$

et pour l'équation (7):

$$10.\quad (GD-ED'')^2-4(FD-ED')(GD'-FD'')=0.$$

Il faut, que les deux expressions en 9 et 10 soient égales à un facteur près; et en comparant deux termes composés de mêmes lettres, on trouve que l'une est une transformation algébrique de l'autre, ou qu'on a

$$11.\quad (GD-ED'')^2-4(FD-ED')(GD'-FD'')=(DG-2D'F+D''E)^2-4(EG-F^2)(DD''-D'^2).$$

Mr. Cayley fait mention de cette formule remarquable (Crelle, Journ. pour les Math. Tom. 30 et 34); je crois, qu'on peut la généraliser.

Corollaire 2me. La surface étant donnée par une équation de la forme $\varphi(x, y, z) = 0$, on trouve les ombilics de la manière suivante.

$$\begin{aligned} \text{Soit } d\varphi &= Xdx+Ydy+Zdz\\ dX &= a\cdot dx+f\cdot dy+e\cdot dz\\ dY &= f\cdot dx+b\cdot dy+d\cdot dz\\ dZ &= e\cdot dx+d\cdot dy+c\cdot dz, \end{aligned}$$

on aura pour le rayon d'une section normale

$$\rho=(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{adx^2+bdy^2+cdz^2+2d\cdot dydz+2edzdx+2fdxdy}.$$

Les rapports dx : dy : dz déterminent la direction de la tangente à la section, et sont assujettis à la condition:

$$Xdx+Ydy+Zdz=0.$$

Pour un ombilic, ρ ou bien $\frac{\rho}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$ est indépendant de dx : dy : dz; donc, on peut trouver quatre quantités, l, L, M, N de manière qu'on ait identiquement

$$\begin{aligned} &adx^2+bdy^2+cdz^2+2ddydz+2edzdx+2fdxdy\\ &=l(dx^2+[illegible]dy^2+[illegible]dz^2)+(Xdx+Ydy+Zdz)(Ldx+Mdy+Ndz). \end{aligned}$$

Il suit de là

$$12.\quad \begin{aligned} a &= l+LX & 2d &= YN+MZ\\ b &= l+LY & 2e &= ZL+NX\\ c &= l+NZ & 2f &= XM+LY. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Les trois dernières équations se transforment en

$$L = \frac{-dX+eY+fZ}{YZ}$$

$$M = \frac{dX-eY+fZ}{ZX}$$

$$N = \frac{dX+eY-fZ}{XY}.$$

En mettant ces valeurs dans les trois premières équations on obtient

$$13.\quad a-\frac{X}{YZ}(-dX+eY+fZ) = b-\frac{Y}{ZX}(dX-eY+fZ) = c-\frac{Z}{XY}(dX+eY-fZ).$$

Telle est la formule qui donne les ombilics. Si dans l'équation de la surface, les variables sont séparées, l'équation (13) se change en trois systèmes à 2 équations, savoir en:

$$14.\quad \begin{cases} X = 0 \\ Z^2(b-a)+Y^2(c-a) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} Y = 0 \\ X^2(c-b)+Z^2(a-b) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} Z = 0 \\ X^2(a-c)+X^2(b-c) = 0. \end{cases}$$

§. 2.

Si les deux sytèmes de lignes courbes menées sur la surface sont les lignes de courbure, il faut que l'équation (7) soit remplie par la supposition $dp = 0$, $dq = 0$, ou bien, qu'on ait

$$FD - ED' = 0;\quad GD' - FD'' = 0.$$

On peut en conclure ou: $\frac{E}{D} = \frac{F}{D'} = \frac{G}{D''}$, ce qui ne subsiste que pour les ombilics, ou

$$F = 0,\ D' = 0;$$

donc, pour que les courbes $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ représentent les lignes de courbure, il faut qu'on ait

$$15.\quad \frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq}+\frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq} = 0.$$

$$16.\quad \frac{d^2x}{dpdq}\left(\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dq}-\frac{dy}{dq}\frac{dz}{dp}\right)+\frac{d^2y}{dpdq}\left(\frac{dz}{dp}\frac{dx}{dq}-\frac{dx}{dp}\frac{dz}{dq}\right)+\frac{d^2z}{dpdq}\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}-\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dp}\right) = 0.$$

Je vais donner deux applications des formules (15) et (16).

Le premier problème a été traité par Monge (Application de l'Analyse, pag. 139) d'après une méthode tout-à-fait différente. Le second problème est beaucoup plus compliqué; j'en ai donné les formules finales, sans indiquer la marche que j'ai suivie (Crelle, Tome 30).

Digitized by Google

§. 3.

Problème 1er. Déterminer les surfaces courbes qui ont un système de lignes de courbure dans des plans parallèles. En supposant les plans des lignes de courbure parallèles au plan des y et z, on peut mettre

$$17.\quad \begin{aligned} x &= p \\ y &= \varphi_1(p, q) \\ z &= \varphi_2(p, q); \end{aligned}$$

et les équations 15 et 16 se changent en

$$18.\quad \frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq} + \frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq} = o.$$

$$19.\quad \frac{d^2z}{dpdp}\frac{dy}{dq} - \frac{d^2y}{dpdq}\frac{dz}{dq} = o.$$

En éliminant $\frac{dy}{dq}, \frac{dz}{dq}$ on obtient

$$20.\quad \frac{dy}{dp}\frac{d^2y}{dpdq} + \frac{dz}{dp}\frac{d^2z}{dpdq} = o.$$

Cette équation qui tient lieu de l'équation (18), s'intègre immédiatement, d'où vient

$$21.\quad \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2 = P^2,$$

P étant une fonction de p seul. On peut remplacer l'équation précédente par

$$22.\quad \begin{cases} \frac{dy}{dp} = P\sin\lambda \\ \frac{dz}{dp} = P\cos\lambda. \end{cases}$$

En intégrant 19 on obtient

$$23.\quad \frac{dy}{dp} = Q\frac{dz}{dq},$$

en désignant par Q une fonction de q seul.

Si l'on combine les équations 23, 22 et 10, on trouve

$$Q\sin\lambda + \cos\lambda = o, \text{ ou } \operatorname{cotg}.\lambda = -Q;$$

donc λ ne contient pas p, et en intégrant 22, on aura:

$$\begin{aligned} y &= \sin\lambda \int P dp + Q_1 \\ z &= \cos\lambda \int P dp + Q_2; \end{aligned}$$

Digitized by Google

où Q_1 et Q_2 sont des fonctions de q. On peut, avec la même généralité, mettre q et P au lieu de λ et $\int P dp$, alors on aura

$$y = P \sin q + Q_1$$
$$z = P \cos q + Q_2.$$

Il en résulte
$$\frac{dy}{dp} = \sin q \frac{dP}{dp} \quad \frac{dy}{dq} = P \cos q + Q_1'$$
$$\frac{dz}{dp} = \cos q \frac{dP}{dp} \quad \frac{dz}{dq} = -P \sin q + Q_2';$$

en substituant ces valeurs, l'éq. 10 se change en

$$\sin q \frac{dQ_1}{dq} + \cos q \frac{dQ_2}{dq} = 0,$$

ce qui revient à
$$Q_1 = \int Q \cos q dq$$
$$Q_2 = -\int Q \sin q dq$$

et les surfaces demandées sont exprimées par

$$24. \quad \begin{cases} x = p \\ y = P \sin q + \int Q \cos q dq \\ z = P \cos q - \int Q \sin q dq. \end{cases}$$

Je passerai sous silence les propriétés géométriques qui se déduisent de ces équations.

§. 4.

Problème 2ième. Déterminer les surfaces courbes qui ont un système des lignes de courbure dans des plans qui passent par une droite fixe.

Je suppose que la droite fixe coincide avec l'axe de z. Soit p l'angle entre le plan (y z) et le plan d'une ligne de courbure quelconque, alors on aura

$$25. \quad \left.\begin{matrix} x = F \sin p \\ y = F \cos p \end{matrix}\right\}.$$

On déduit de cette équation les valeurs suivantes:

$$\frac{dx}{dp} = F \cos p + \sin p \frac{dF}{dp}. \qquad \frac{dx}{dq} = \frac{dF}{dq} \sin p$$
$$\frac{dy}{dp} = -F \sin p + \cos p \frac{dF}{dp}. \qquad \frac{dy}{dq} = \frac{dF}{dq} \cos p.$$
$$\frac{d^2x}{dpdq} = \frac{dF}{dq} \cos p + \sin p \frac{d^2F}{dpdq}$$
$$\frac{d^2y}{dpdq} = -\frac{dF}{dq} \sin p + \cos p \frac{d^2F}{dpdq}.$$

Digitized by Google

La seconde de nos formules fondamentales (16) se change par ces valeurs en

$$\left(\frac{d^2F}{dpdq}\sin p + \frac{dF}{dq}\cos p\right)\left(-F\sin p\frac{dz}{dq} + \frac{dF}{dp}\cos p\frac{dz}{dq} - \frac{dz}{dp}\frac{dF}{dq}\cos p\right)$$
$$+ \left(\frac{d^2F}{dpdq}\cos p - \frac{dF}{dq}\sin p\right)\left(\frac{dz}{dp}\frac{dF}{dq}\sin p - \frac{dz}{dq}F\cos p - \frac{dz}{dq}\frac{dF}{dp}\sin p\right) + \frac{d^2z}{dpdq}F\frac{dF}{dq} = 0,$$

cette équation est la même que la suivante

$$26.\quad \frac{dF}{dq}\left\{F\frac{d^2z}{dpdq} - \frac{dz}{dp}\frac{dF}{dq}\right\} + \frac{dz}{dq}\left\{\frac{dF}{dq}\frac{dF}{dp} - F\frac{d^2F}{dpdq}\right\} = 0.$$

La formule (15) se change en

$$27.\quad \frac{dF}{dp}\frac{dF}{dq} + \frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq} = 0.$$

En éliminant $\frac{dF}{dq}$ et $\frac{dz}{dq}$ des équations (26) et (27) on obtient

$$28.\quad \frac{dz}{dp}\left\{F\frac{d^2z}{dpdq} - \frac{dz}{dp}\frac{dF}{dq}\right\} + \frac{dF}{dp}\left\{F\frac{d^2F}{dpdq} - \frac{dF}{dp}\frac{dF}{dq}\right\} = 0;$$

l'équation (28) tient lieu de l'équation (26). Mais on peut écrire au lieu de (28)

$$F\left\{\frac{dz}{dp}\frac{d^2z}{dpdq} + \frac{dF}{dp}\frac{d^2F}{dpdq}\right\} - \frac{dF}{dq}\left\{\frac{dz^2}{dp^2} + \frac{dF^2}{dp^2}\right\} = 0,$$

ou bien

$$\frac{d\log F}{dq} = \tfrac{1}{2}\,\frac{d\log\left(\frac{dz^2}{dp^2} + \frac{dF^2}{dp^2}\right)}{dq}.$$

En intégrant on obtient

$$29.\quad P_1F = \left(\frac{dF^2}{dp^2} + \frac{dz^2}{dp^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

P_1 est la fonction arbitraire de p, introduite par l'intégration.

On peut remplacer l'équation (29) par les deux autres

$$30.\quad \frac{dF}{dp} = P_1F\cos l$$

$$31.\quad \frac{dz}{dp} = P_1F\sin l.$$

Par ces valeurs (27) est changée en

$$32.\quad \cos l\frac{dF}{dq} + \sin l\frac{dz}{dq} = 0.$$

Digitized by Google

En différentiant (30) et (31) par rapport à q et (32) par rapport à p, on trouve

$$\frac{d^2F}{dpdq} = P_1 \frac{dF}{dq} \cos l - P_1 F \sin l \frac{dl}{dq}$$

$$\frac{d^2z}{dpdq} = P_1 \frac{dF}{dq} \sin l + P_1 F \cos l \frac{dl}{dq}.$$

$$\cos l \frac{d^2F}{dpdq} + \sin l \frac{d^2z}{dpdq} + \frac{dl}{dp}\left(-\sin l \frac{dF}{dp} + \cos l \frac{dz}{dq}\right) = 0.$$

En éliminant $\frac{d^2F}{dpdq}$, $\frac{d^2z}{dpdq}$ il vient

$$33. \quad P_1 \frac{dF}{dp} + \frac{dl}{dp}\left(-\sin l \frac{dF}{dp} + \cos l \frac{dz}{dq}\right) = 0.$$

Les deux équations (32) et (33) donnent deux valeurs différentes du rapport $\frac{dF}{dq}$ à $\frac{dz}{dq}$, savoir

$$\cos l \frac{dl}{dp} : -\left(P_1 - \sin l \frac{dl}{dp}\right)$$

et $\sin l : -\cos l$, donc on aura

$$34. \quad P_1 \sin l = \frac{dl}{dp},$$

ou, en intégrant

$$35. \quad \operatorname{tg} \frac{l}{2} = Q e^{\int P_1 dp};$$

Q est la fonction arbitraire de q introduite par l'intégration.

Au moyen de (34) on change (30) en

$$\frac{dF}{dp} = F \operatorname{cotg} l \frac{dl}{dp};$$

on obtient par l'intégration

$$36. \quad F = Q_1 \sin l;$$

et, en transformant (31) au moyen de (34) et (36) on aura

$$\frac{dz}{dp} = Q_1 \sin l \frac{dl}{dp} \text{ ou bien}$$

$$37. \quad z = -Q_1 \cos l + Q_2;$$

Q_1 et Q_2 étant des fonctions arbitraires de q.

Il y a une rélation entre les 3 fonctions Q, Q_1, Q_2 qui doivent satisfaire à l'équation (32).

En substituant les valeurs de $\frac{dF}{dq}$ et $\frac{dz}{dq}$ on a au lieu de (32)

$$\cos l \left(Q_1 \cos l \frac{dl}{dq} + \sin l \frac{dQ_1}{dq}\right) + \sin l \left(Q_1 \sin l \frac{dl}{dq} - \cos l \frac{dQ_1}{dq} + \frac{dQ_2}{dq}\right) = 0,$$

Digitized by Google

ou bien

$$38.\quad Q_1 \frac{dl}{dq} + \sin l \frac{dQ_2}{dq} = o;$$

et, d'après (35) on a $\frac{1}{\sin l} \frac{dl}{dq} = \frac{dQ}{dq} \frac{1}{Q}$, par conséquent (38) se change en

$$39.\quad Q_1 \frac{dQ}{dq} + Q \frac{dQ_2}{dq} = o.$$

Les surfaces dont il s'agit, sont représentées par le système de formules:

$$40.\quad \begin{cases} x = Q_1 \sin l \sin p \\ y = Q_1 \sin l \cos p \\ z = -Q_1 \cos l + Q_2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} tg\frac{l}{2} = Qe^{\int P_1 dp} \\ Q_1 \frac{dQ}{dq} + \frac{dQ_2}{dq} Q = o. \end{matrix}$$

En substituant tang. $\frac{Q}{2}$ au lieu de Q la formule (39) se change en

$$41.\quad \frac{dQ_2}{dq} = -\frac{Q_1}{\sin Q} \frac{dQ}{dq};$$

et comme q n'est qu'implicitement dans les fonctions Q, Q_1, Q_2, on peut mettre

$$42.\quad Q_1 = \frac{q}{\sin Q},$$

donc, on a

$$43.\quad \frac{dQ_2}{dq} = -\frac{q}{\sin Q^2} \frac{dQ}{dq}.$$

En intégrant on obtient

$$Q_2 = q \cot g\, Q - \int \cot g\, Q dq.$$

On peut écrire $-z$ au lieu de z et P au lieu de $e^{\int P_1 dp}$; et par ces substitutions les formules 40 deviennent.

$$44.\quad \begin{cases} x = \frac{q}{\sin Q} \sin l \sin p \\ y = \frac{q}{\sin Q} \sin l \cos p \\ z = \frac{q}{\sin Q} \cos l - q \cot g\, Q + \int \cot g\, Q dq. \end{cases} \qquad tg\frac{l}{2} = P tg\frac{Q}{2}.$$

Telle est la représentation des surfaces par les arguments p et q des lignes de courbure. On obtient les surfaces de révolution à méridien plan en faisant $p \cdot e\ P = 1$; dans cette hypothèse on a

$$x = q \sin p, \quad y = q \cos p, \quad z = \int \cot g\, Q dq.$$

Digitized by Google

En écrivant $\operatorname{tg}\frac{P}{2}$ au lieu de P, on obtiendrait

$$45. \quad \begin{cases} x = \dfrac{q \sin P \sin p}{1 + \cos P \cos Q}. \\ y = \dfrac{q \sin P \cos p}{1 + \cos P \cos Q}. \\ z = \dfrac{q \cos P \sin Q}{1 + \cos P \cos Q} + \int \operatorname{cotg} Q dq. \end{cases}$$

Pour expliquer quelques unes des propriétés géométriques des surfaces je me servirai des formules (43) sous la forme suivante

$$46. \quad \begin{cases} x = f \sin l \sin p & \operatorname{tg}\frac{l}{2} = P \operatorname{tg}\frac{Q}{2} \\ y = f \sin l \cos p & f = \dfrac{q}{\sin Q} \\ z = f \cos l - q\dfrac{dt}{dq} + t, & t = \int \operatorname{cotg} Q dq. \end{cases}$$

On trouve d'abord

$$47. \quad x^2 + y^2 + \left(z - t + q\frac{dt}{dq}\right)^2 = f^2.$$

Comme f et l sont des fonctions de q, on voit que les lignes de courbure de l'autre système sont des courbes sphériques. Les centres de toutes les sphères sont sur la droite commune à tous les plans des courbes du premier système

On trouve en différentiant

$$49. \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dp} = f \sin l \left(\dfrac{\cos l \sin p \cdot P'}{P} + \cos p\right) & \dfrac{dx}{dq} = \left(f' + \dfrac{f \cos l}{\sin Q} Q'\right) \sin l \sin p \\ \dfrac{dy}{dp} = f \sin l \left(\dfrac{\cos l \cos p P'}{P} - \sin p\right) & \dfrac{dy}{dq} = \left(f' + \dfrac{f \cos l}{\sin Q} Q'\right) \sin l \cos p \\ \dfrac{dz}{dp} = f \sin l \cdot - \dfrac{\sin l P'}{P} & \dfrac{dz}{dq} = \left(f' + \dfrac{f \cos l}{\sin Q} Q'\right) \cos l \end{cases} ;$$

où j'ai désigné $\frac{dP}{dp}$ et $\frac{dQ}{dq}$ par P′ et Q′.

Pour les courbes du premier système on a p = const., donc, l'équation de la tangente sera

$$\xi - x : \eta - y : \zeta - z = \frac{dx}{dq} : \frac{dy}{dq} : \frac{dz}{dq},$$

ou bien

$$\xi - x : \eta - y : \zeta - z = \sin l \sin p : \sin l \cos p : \cos l.$$

On voit par cette proportion que l'angle l est l'angle formé par l'axe de z que j'appellerai axe de la surface, et la tangente d'une courbe du premier système, que j'appellerai méridien, comme dans les surfaces de révolution.

Digitized by Google

La tangente du méridien coupe l'axe en un point, qui est donné par l'équation

$$(\zeta - z)\sin l \cos p = -y\cos l,$$

ou bien

$$\zeta = z - \frac{y\cos l}{\sin l\cos p} = -q\frac{dt}{dq} + t.$$

Mais $-q\frac{dt}{dq}+t$ ne dépend que de la variable q, donc la surface développable circonscrite à la surface (46) suivant la ligne de courbure

$$50.\quad q = \text{const.}$$

est une surface conique, dont le sommet est sur l'axe.

Par le rapprochement des formules on voit immédiatement, que le sommet de la surface conique est en même temps le centre de la sphère qui contient la courbe (50).

En portant sur l'axe la quantité t comme abscisse et une perpendiculaire sur l'axe dans le plan du méridien, on obtiendra une courbe qui est la même pour tous les méridiens. Comme les points du méridien et les points de la nouvelle courbe sont donnés par la variable q, un point dans une de courbes aura un point correspondant dans l'autre. Les tangentes en deux points correspondants se rencontrent au même point de l'axe.

Le tangente à la courbe (50) est donnée par l'éq.

$$51.\quad \xi - x : \eta - y : \zeta - z = \cos l\sin p\frac{P'}{P} + \cos p : \cos l\cos p\frac{P'}{P} - \sin p : -\sin l\frac{P'}{P};$$

L'équation du méridien est

$$\xi\cos p - \eta\sin p = 0;$$

et, en désignant l'angle entre la droite (51) et le méridien par W, on a

$$52.\quad \sin W = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{P'^2}{P^2}}}.$$

On voit par cette équation, que les arêtes de la surface développable circonscrite à (46) suivant une courbe p = const. sont également inclinées sur le plan de la courbe p = const.; mais ce n'est qu'un cas spécial d'un théorème sur les lignes de courbure planes.

Comme P est une fonction de l'angle p, on peut d'écrire dans un plan perpendiculaire à l'axe une spirale autour de cette droite donnée par l'équation

$$r = P,$$

l'angle entre le rayon vecteur r et la tangente à la spirale est égal a W. Les remarques précédentes sont les éléments nécessaires à une discussion géométrique des surfaces en question.

Digitized by Google

§. 5.

Soient l et m deux tangentes au même point d'une surface, dont la première soit l'arête d'une surface développable circonscrite à la surface, et la seconde la tangente à la courbe de contact. Comme chacune de ces droites joint deux points infiniment voisins de la surface, les équations en seront les suivantes, savoir

de l, ou de l'arête:

$$53.\quad \xi - x : \eta - y : \zeta - z = \frac{dx}{dp} + q'_0\frac{dx}{dq} : \frac{dy}{dp} + q'_0\frac{dy}{dq} : \frac{dz}{dp} + q'_0\frac{dz}{dq};$$

de m, ou de la tangente à la courbe de contact:

$$54.\quad \xi - x : \eta - y : \zeta - z = \frac{dx}{dp} + q'\frac{dx}{dq} : \frac{dy}{dp} + q'\frac{dy}{dq} : \frac{dz}{dp} + q'\frac{dz}{dq}.$$

D'après l'hypothèse, la droite l ou (53) doit être l'intersection de deux plans tangents infiniment voisins aux deux points de la surface situés sur la droite m. Les équations des plans tangens sont

$$55.\quad \begin{cases} A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0. \\ (A + dA)(\xi - x - dx) + (B + dB)(\eta - y - dy) + (C + dC)(\zeta - z - dz) = 0. \end{cases}$$

Comme les points de contact sont situés sur 54, on aura

$$dA = \left(\frac{dA}{dp} + q'\frac{dA}{dq}\right)dp \qquad dx = \left(\frac{dx}{dp} + q'\frac{dx}{dq}\right)dp$$

$$dB = \left(\frac{dB}{dp} + q'\frac{dB}{dq}\right)dp \qquad dy = \left(\frac{dy}{dp} + q'\frac{dy}{dq}\right)dp$$

$$dC = \left(\frac{dC}{dp} + q'\frac{dC}{dq}\right)dp. \qquad dz = \left(\frac{dz}{dp} + q'\frac{dz}{dq}\right)dp.$$

En négligeant les termes multipliés par dp^2 et en ayant égard des relations (1), on voit, que la droite (53) doit satisfaire aux deux conditions

$$56.\quad \begin{cases} A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0. \\ \left(\frac{dA}{dp} + q'\frac{dA}{dq}\right)(\xi - x) + \left(\frac{dB}{dp} + q'\frac{dB}{dq}\right)(\eta - y) + \left(\frac{dC}{dp} + q'\frac{dC}{dq}\right)(\zeta - z) = 0. \end{cases}$$

En y substituant les rapports $\xi - x : \eta - y : \zeta - z$ donnés par l'équation 53, on obtient

$$57.\quad A\left(\frac{dx}{dp} + q'_0\frac{dx}{dq}\right) + B\left(\frac{dy}{dp} + q'_0\frac{dy}{dq}\right) + C\left(\frac{dz}{dp} + q'_0\frac{dz}{dq}\right) = 0.$$

$$58.\quad \left(\frac{dA}{dp} + q'\frac{dA}{dq}\right)\left(\frac{dx}{dp} + q'_0\frac{dx}{dp}\right) + \left(\frac{dB}{dp} + q'\frac{dB}{dp}\right)\left(\frac{dy}{dp} + q'_0\frac{dy}{dq}\right) + \left(\frac{dC}{dp} + q'\frac{dC}{dq}\right)\left(\frac{dz}{dp} + q'_0\right) = 0.$$

En ayant égard des relations (1) et (2) on trouve, que (57) est une équation identique et que (58) se change en

$$59.\quad D + D'(q' + q'_0) + D''q'q'_0 = 0.$$

L'équation (59) fait voir, qu'il y a réciprocité parfaite entre les deux droites (53) et (54). C'est Mr. Dupin qui a le premier démontré cette réciprocité et qui a donné aux

Digitized by Google

différents systèmes de 2 droites le nom de tangentes conjuguées. Il en a rattaché la théorie à l'examen d'une section conique, située dans le plan tangent de la surface. Deux diamètres conjugués de la conique sont deux tangentes conjuguées de la surface. Les rayons de courbure de deux sections normales faites suivant deux tangentes conjuguées ont une somme constante.

Tels sont les théorèmes sur les tangentes conjuguées qu'on doit au savant Géomètre que je viens de nommer. J'ajouterai quelques formules et plusieurs remarques à cette théorie.

Je suppose que p et q soient les paramètres des lignes de courbures, ou bien, qu'on ait

$$F = o, \quad D = o,$$

En désignant par w l'angle formé par les deux tangentes conjuguées (53) et (54) on aura

$$60. \quad \cos w = \frac{E + q'q'_0 G}{(E+Gq'^2)^{\frac{1}{2}}(E+Gq'^2_0)^{\frac{1}{2}}};$$

et comme par la supposition que nous venons de faire, l'équation (59) se change en

$$61. \quad D + D''q'q'_0 = o;$$

on aura

$$E + q'q'_0 G = \frac{1}{D''}(ED'' - GD)$$

et

$$E + Gq'^2_0 = \frac{ED''^2q'^2 + GD^2}{D''^2q'^2},$$

donc, on a

$$61. \quad \cos w = \frac{(ED'' - GD)q'}{(E+Gq'^2)^{\frac{1}{2}}(GD^2+ED''^2q'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Il vient de là

$$62. \quad \sin w = \frac{\sqrt{EG}(D+D''q'^2)}{(E+Gq'^2)^{\frac{1}{2}}(GD^2+ED''^2q'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Soit P le rayon principal suivant la tangente de la ligne p = const.

Q - - - - - - - - - q = const.,

ρ - - de courbure de la section normale la tangente m ou (54), on a, d'après la formule (52))

$$63. \quad \begin{cases} P = \frac{G}{D''}\sqrt{EG} & Q = \frac{E}{D}\sqrt{EG} \\ & \rho = \frac{E+Gq'^2}{D+D''q'^2}\sqrt{EG}. \end{cases}$$

En désignant par a l'angle entre la section normale suivant la tangente (54) et la section principale qui correspond à la ligne de courbure p = const. on a

Digitized by Google

$$64. \quad \begin{cases} \cos a = \dfrac{q'G}{\sqrt{G(E+Gq'^2)}} = q'\sqrt{\dfrac{G}{E+Gq'^2}}. \\ \sin a = \sqrt{\dfrac{E}{E+Gq'^2}}. \end{cases}$$

et

$$\frac{\cos a^2}{P^2} + \frac{\sin a^2}{Q^2} = \frac{q'^2ED''^2+GD^2}{E^2G^2(E+Gq'^2)}.$$

En extrayant la racine carrée et en multipliant par ρ on obtient

$$\rho\left(\frac{\cos a^2}{P^2} + \frac{\sin a^2}{Q^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(E+Gq'^2)^{\frac{1}{2}}(GD^2+q'^2ED''^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{EG}(D+D''q'^2)},$$

ou bien

$$65. \quad \sin w = \frac{1.}{\rho\left(\dfrac{\cos a^2}{P^2} + \dfrac{\sin a^2}{Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

§. 6.

Les formules du numero précédent résolvent quelques problèmes de Géométrie; savoir les suivantes:

Soient f et g deux points d'une surface infiniment voisins l'un de l'autre, déterminer 1°. la plus courte distance des deux normales en f et g; 2°. calculer les coordonnées du point de rencontre h de la plus courte distance avec la normale en f, et enfin calculer la distance fh. Je traiterai ces questions l'une après l'autre.

Soient d'abord f et g deux points dans deux plans quelconques F et G. En élevant en f et g les perpendiculaires sur ces plans, on peut exprimer la plus courte distance λ entre ces droites par la formule

$$66. \quad \lambda = \overline{fg} \cdot \cos u,$$

u étant l'angle entre la plus courte distance et la droite fg. Mais comme la plus courte distance doit être parallèle aux deux plans F et G, elle sera aussi parallèle à l'intersection de F et G, et l'angle u sera en même temps l'angle entre le droite fg, et l'intersection du plans F et G. Si les deux points f et g sont deux points d'une surface infiniment voisins qui déterminent l'élement ds, on a la formule

$$67. \quad \lambda = ds \cdot \cos w;$$

λ étant la plus courte distance des normales aux extrémités de l'élement ds, w l'angle entre ds et sa direction conjuguée.

Nous avons trouvé la valeur de $\sin w$; en y substituant pour ρ l'espression donnée par le théorème connu d'Euler, qui se démontre par nos formules (63), (64) on obtient

$$\sin w = \frac{\cos a^2}{P} + \frac{\sin a^2}{Q} \frac{1}{\left(\dfrac{\cos a^2}{P^2} + \dfrac{\sin a^2}{Q}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

Digitized by Google

d'où vient

$$68.\quad \cos w = \pm \cos a \sin a \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right) \frac{1}{\left(\frac{\cos a^2}{P^2} + \frac{\sin a^2}{Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour les lignes de courbure a est ou = o, ou = à un angle droit, donc on aura $\lambda = o$, c'est à dire les normales aux extrémités de l'élément d'une ligne de courbure se rencontrent. Il est bien facile de substituer à cette phrase les expressions rigoureuses (voir le traité de Mr. Moigno, Vol. 1, pag. 384).

Pour obtenir les valeurs maxima de cos w il faut différentier cos w par rapport à a et on obtient

$$o = (\cos a^2 - \sin a^2)\left(\frac{\cos a^2}{P^2} + \frac{\sin a^2}{Q^2}\right) - \cos a^2 \sin a^2 \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{P^2}\right) = o,$$

ou bien

$$o = \frac{\cos a^4}{P^2} - \frac{\sin a^4}{Q^2},$$

ce qui revient à

$$69.\quad \operatorname{tg} a^4 = \frac{Q^2}{P^2}.$$

Si P et Q sont du même signe, on en conclut

$$\operatorname{tg} a^2 = \frac{Q}{P},$$

d'où

$$\sin a^2 = \frac{Q}{P+Q},\ \cos a^2 = \frac{P}{P+Q},\ \frac{\cos a^2}{P^2} + \frac{\sin a^2}{Q^2} = \frac{1}{PQ},$$

par consequent

$$70.\quad \cos w = \pm \frac{Q-P}{Q+P}.$$

La valeur correspondente de ρ serait

$$71.\quad \rho = \frac{1}{\frac{\cos a^2}{P} + \frac{\sin a^2}{Q}} = \tfrac{1}{2}(P+Q);$$

donc, la valeur maximum de cos w ou de λ correspond à une section normale, dont le rayon est le moyen entre les rayons des sections principales; il y en a deux.

P et Q étant de signe contraire on trouve

$$\operatorname{tg} a^2 = -\frac{P}{Q},\ \cos a^2 = \frac{P}{P-Q};\ \sin a^2 = -\frac{Q}{P-Q};$$

on a donc ici

$$72.\quad \cos w = \pm 1, \qquad \rho = \text{à l'infini},$$

ou pour les surfaces qui ont les courbures principales dirigées en sens contraire le maximum de λ correspond aux sections normales dont la courbure s'évanouit; la plus courte distance coincide dans ce cas avec l'élement ds.

Digitized by Google

En résumant ce que j'ai expliqué on a le théorème suivant:

Étant décrite sur une surface autour du point f et avec le rayon infiniment petit r la circonférence de cercle $gg'g''\ldots$, si à tous ces points on mène les normales de la surface $F, G, G', G''\ldots$ et les distances les plus courtes entre F et $G, G', G''\ldots$ que je désignerai par $l, l', l''\ldots$:

1°) une quelconque des quantités l sera égale au rayon fg multiplié par le cosinus de l'angle fg et la direction conjuguée;

2°) les rayons principaux de la surface étant du même signe P et Q, les valeurs maxima des distances l correspondent aux directions suivant lesquelles le rayon de la section normale est $\frac{P+Q}{2}$ et la valeur maximum est égale à $\pm r\frac{Q-P}{Q+P}$;

3°) les rayons principaux de la surface étant du signe contraire, les valeurs maxima correspondent aux directions suivant lesquelles le rayon de la section normale est infini et la plus courte distance coincide avec le rayon.

§. 7.

Je vais à présent résoudre le second problème:

Déterminer le point où la plus courte distance entre deux normales infiniment voisines rencontre une quelconque de ces droites.

Soient

$$73.\quad \frac{X-l}{a} = \frac{Y-m}{b} = \frac{Z-n}{c};\quad \frac{X-l-l'}{a+a'} = \frac{Y-m-m'}{b+b'} = \frac{Z-n-n'}{c+c'}$$

les équations de deux droites quelconques. L'équation du plan parallèles aux droites est

$$74.\quad (bc'-cb')X+(ca'-ac')Y+(ab'-ba')Z = C.$$

L'équation du plan perpendiculaire au plan (74) et qui passe par la seconde droite (73) est

$$75.\quad L(X-l-l')+M(Y-m-m')+N(Z-n-n') = 0;$$

le rapport de L, M, N étant donné par les conditions.

$$76.\quad \begin{cases} L(a+a')+M(b+b')+N(c+c') = 0. \\ L(bc'-cb')+M(ca'-ac')+N(ab'-ba') = 0. \end{cases}$$

Il suit de là, en désignant par f un facteur indéterminé, qu'on aura

$$77.\quad \begin{cases} fL = a(a'^2+b'^2+c'^2+aa'+bb'+cc')-a'(a^2+b^2+c^2+aa'+bb'+cc') \\ fM = b(a'^2+b'^2+c'^2+aa'+bb'+cc')-b'(a^2+b^2+c^2+aa'+bb'+cc') \\ fN = c(a'^2+b'^2+c'^2+aa'+bb'+cc')-c'(a^2+b^2+c^2+aa+bb'+cc'). \end{cases}$$

Le plan (75) et la plus courte distance entre le droites (73) couperont la première de ces droites au même point. Seront X, Y, Z les coordonnés du point demandé; on aura

$$78.\quad \begin{cases} X = l+ar \\ Y = m+br \\ Z = n+cr \end{cases} \qquad r(aL+bM+cN) = l'L+m'M+n'R;$$

Digitized by Google

ou, en faisant

$$a^2+b^2+c^2 = h$$
$$aa'+bb'+cc' = i$$
$$a'^2+b'^2+c'^2 = k,$$

$$79.\quad r(hk-i^2) = (al'+bm'+cn')(k+i)-(a'l'+b'm'+c'n')(h+i).$$

Supposons que les deux droites (73) soient deux normales voisines; on aura

$$a = A,\quad b = B,\quad c = C,\quad l = x,\quad m = y,\quad n = z,$$
$$a' = dA,\quad b' = dB,\quad c' = dC,\quad l' = dx,\quad m' = dy,\quad n' = dz;$$

et la formule (79) se change en

$$80.\quad r = -\frac{(dxdA+dydB+dzdC)(A^2+B^2+C^2)}{(BdC-CdB)^2+(CdA-AdC)^2+(AdB-BdA)^2};$$

car on a (1)

$$Adx+Bdy+Cdz = 0.$$

On trouve d'après les formules (2)

$$81.\quad -(dxdA+dydB+dzdC) = Ddp^2+2D'dpdq+D''dq^2.$$

On a en différentiant

$$\frac{dB}{dp} = \frac{dz}{dp}\frac{d^2x}{dpdq} - \frac{dz}{dq}\frac{d^2x}{dp^2} + \frac{d^2z}{dp^2}\frac{dx}{dq} - \frac{d^2z}{dpdq}\frac{dx}{dq}$$
$$\frac{dA}{dp} = -\frac{dz}{dp}\frac{d^2y}{dpdq} + \frac{dz}{dq}\frac{d^2y}{dp^2} - \frac{d^2z}{dp^2}\frac{dy}{dp} + \frac{d^2z}{dpdq}\frac{dy}{dp},$$

et on obtient

$$A\frac{dB}{dp}-B\frac{dA}{dp} = \frac{dz}{dp}\left(A\frac{d^2x}{dpdq}+B\frac{d^2y}{dqdp}+C\frac{d^2z}{dpdq}\right)-\frac{dz}{dq}\left(A\frac{d^2x}{dp^2}+B\frac{d^2y}{dp^2}+C\frac{d^2z}{dp^2}\right) = D'\frac{dz}{dp}-D\frac{dz}{dq}.$$

On trouverait de même

$$A\frac{dB}{dq}-B\frac{dA}{dq} = -D'\frac{dz}{dq}+D'\frac{dz}{dp},$$

et conséquemment pour la différentielle complète

$$AdB-BdA = \frac{dz}{dq}(D'dp+D''dq)-\frac{dz}{dq}(Ddp+D'dq),$$
$$BdC-CdB = \frac{dx}{dp}(D'dp+D''dq)-\frac{dx}{dq}(Ddp+D'dq),$$
$$CdA-AdC = \frac{dy}{dp}(D'dp+D''dq)-\frac{dy}{dq}(Ddp+D'dq).$$

En ayant égard de la relation

$$A^2+B^2+C^2 = EG-F^2,$$

on a les équations finales:

$$82.\quad \begin{cases} X = x+Ar \\ Y = y+Br \\ Z = z+Cr \\ r = \dfrac{(EG-F^2)(Ddp^2+2D'dpdq+D''dq^2)}{E(D'dp+D''dq)^2-2F(D'dp+D''dq)(Ddp+D'dq)+G(Ddp+D'dq)^2}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Pour abréger l'énoncé des théorèmes je nommerai le point (X, Y, Z) le pôle de l'élement indiqué par le rapport des incréments dp, dq, c'est le point où la plus courte distance entre les normales aux points de la surface (x, y, x) et (x+dx, y+dy, z+dz) rencontre la première normale. La distance des points (X, Y, Z) et (x, y, z) que j'appellerai *distance polaire* est

$$83.\quad \Delta = r(EG - F^2)^{\frac{1}{2}}.$$

§. 8.

Si p et q sont le paramètres des lignes de courbure, on obtient.

$$84.\quad \Delta = \frac{(EG)^{\frac{1}{2}}(Ddp^2 + D''dq^2)}{ED''^2dq^2 + GD^2dp^2}. \qquad = (EG)^{\frac{1}{2}}\frac{D + D''q'^2}{GD^2 + ED''^2q'^2}.$$

Mais en désignant comme dans le numéro précédent par w l'angle entre l'élement et la direction conjuguée, par a l'angle entre l'élement et la tangente qui correspond à la ligne de courbure p = const., par ρ le rayon de la section normale faite suivant la direction de l'élement, on a

$$\rho = \frac{E + Gq'^2}{D + D''q'^2}\sqrt{EG}; \qquad \sin w = \frac{\sqrt{EG}}{(E + Gq'^2)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{D + D''q'^2}{(GD^2 + ED''^2q'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

et par conséquent $$85.\quad \Delta = \rho \sin w^2.$$

En substituant la valeur de la formule (65), on aura

$$86.\quad \frac{1}{\Delta\rho} = \frac{\cos a^2}{P^2} + \frac{\sin a^2}{Q^2},$$

ou bien

$$87.\quad \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\cos a^2}{P} + \frac{\sin a^2}{Q}\right) = \frac{\cos a^2}{P^2} + \frac{\sin a^2}{Q^2}.$$

La formule (84) sert aussi à démontrer le theorème suivant:

„Pour deux directions conjuguées les valeurs réciproques des distances polaires ont une somme constante, c'est à dire

$$88.\quad \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta'} = \frac{1}{P} + \frac{1}{Q}.$$"

En effet, on a

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{(EG)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{GD^2 + ED''q'^2}{D + D''q'^2};$$

pour obtenir la valeur $\frac{1}{\Delta'}$, qui appartient à la direction conjuguée, il faut mettre $-\frac{D}{D''q'}$ au lieu de q' (61), donc on a

$$\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta'} = \frac{1}{(EG)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{GD^2 + ED''^2q'^2}{D + D''q'^2} + \frac{DD''(E + Gq'^2)}{D + D''q'^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{(EG)^{\frac{1}{2}}}(DG + ED'') = \frac{D}{E\sqrt{EG}} + \frac{D''}{G\sqrt{EG}} = \frac{1}{P} + \frac{1}{Q}.$$

Si les quantités Δ_1, ρ_1 se rapportent à une direction perpendiculaire sur la première on aura

$$89.\quad \frac{1}{\Delta\rho} + \frac{1}{\Delta_1\rho_1} = \frac{1}{P^2} + \frac{1}{Q^2}.$$

Digitized by Google

ÉTUDE SUR LES OEUVRES PHILOSOPHIQUES DE FRÉDÉRIC LE GRAND.

bh. de La Harpe.

Le temps est la pierre de touche de la grandeur humaine. Il est bien peu de statues qu'il laisse sur leur piédestal avec l'attitude ou les dimensions que les contemporains leur donnèrent. Sans doute ce juge inexorable commet aussi ses injustices, comme toutes les puissances de ce monde; mais il prononce sans appel, et l'on est obligé de se soumettre, qu'on le veuille ou non, à ses sentences souveraines. Tout comme Solon disait à Crésus qu'un homme ne pouvait être répnté heureux que quand sa carrière était achevée, de même celui à qui son siècle donne le nom de grand n'est assuré de le conserver que lorsque la postérité a sanctionné ce jugement.

Frédéric II appartient à cette classe d'êtres privilégiés dont la gloire, bien loin de décroître, grandit avec les années. A l'époque fort peu monarchique où nous vivons, il est certainement peu de personnes qui ne rendent hommage à son génie. On se plaît à reconnaître que l'Allemagne lui doit beaucoup, et la Prusse presque tout ce qu'elle est; chacun admire la fécondité de son esprit et la force de son caractère. Mais il est une face sous laquelle on est moins accoutumé à considérer cette grande figure, et qui cependant mérite d'attirer le regard du penseur: c'est l'âme, ce sont les sentiments moraux de l'homme caché sous la pourpre royale. Or, quelque légitime que soit le respect qu'inspire le rang suprême, il est bien permis d'attacher plus d'importance encore aux qualités morales qui en rehaussent l'éclat. Il existe donc deux Frédéric II: le monarque et l'individu moral. Le premier appartient à l'histoire, qui lui a déjà assigné son rang; le second est moins connu, surtout à l'étranger, et pourtant il n'est pas moins curieux à étudier.

On peut le faire de deux manières: en lisant des ouvrages spéciaux écrits sur sa personne et sa vie, parmi lesquels les plus intéressants, les plus riches en détails sont ceux de M. J.-D.-E. Preuss *); puis surtout en lisant les écrits du Roi lui-même, et en cherchant

*) *Friedrich der Grosse, eine Lebensgeschichte. — Friedrich der Grosse mit seinen Verwandten und Freunden. — Friedrich der Grosse als Schriftsteller.*

Digitized by Google

à y surprendre le secret de sa pensée. Ce dernier genre d'investigations offre un singulier attrait; il y a peu de grands princes qui aient fourni à l'histoire de pareils matériaux. La plupart se sont contentés d'agir, laissant à d'autres le soin de raconter, de commenter leurs actions. Frédéric, lui, a fait l'un et l'autre; il a agi et écrit, et il y aurait une impardonnable négligence à ne pas profiter des ressources qu'il nous offre pour le connaître.

La nouvelle édition que S. M le Roi fait faire des oeuvres de son illustre prédécesseur, édition complète et très-fidèle, a classé les écrits du grand Frédéric en cinq séries: 1) *Oeuvres historiques;* 2) *Oeuvres philosophiques;* 3) *Oeuvres poétiques;* 4) *Correspondance;* 5) *Écrits militaires.* L'impression des deux premières séries est achevée. L'auteur de ces lignes a publié l'an dernier une critique sommaire des *Oeuvres historiques* dans un recueil périodique qui, depuis, a cessé de paraître *). Qu'il lui soit permis de dire ici quelques mots des écrits de la seconde série, celle des *Oeuvres philosophiques.* Ayant travaillé à cette nouvelle rédaction, il a pu se familiariser peu à peu avec la manière de penser et d'écrire du royal auteur, et quoiqu'il ne se dissimule nullement son insuffisance, il ose espérer que l'exactitude des renseignements qu'il va donner fera excuser ce qui lui manque du côté du savoir et du talent littéraire.

On se tromperait si l'on s'attendait à trouver dans les *Oeuvres philosophiques* de Frédéric le Grand quelque chose qui ressemblât à un corps de doctrine savamment ordonné et partant d'un principe un. L'esprit de Frédéric, et c'est une de ses plus belles qualités, n'est pas systématique du tout. C'est un de ces génies pratiques dont le bon sens forme le principal élément, comme le XVIIIe siècle savait les former. Une idée se présente à lui: au lieu de la rattacher à une théorie générale, comme nous ne manquerions pas de le faire, il l'étudie en elle-même, et cherche à découvrir le parti qu'on pourrait en tirer, soit pour le gouvernement, soit pour la conduite morale, ou dans un autre but quelconque. La dénomination même d'*Oeuvres philosophiques* n'est pas de lui. C'est le nouvel éditeur qui a rangé sous ce titre un peu élastique un certain nombre de traités sur les sujets les plus divers. Politique, législation, philosophie pratique, morale, éducation, polémique, littérature, il y a de tout. Ces traités sont plus ou moins longs et développés, suivant l'importance que l'auteur y attachait, ou le temps que sa vie agitée lui permettait d'y consacrer. Leur mérite littéraire varie aussi beaucoup, par les mêmes raisons, auxquelles il en faut ajouter une autre. On sait que Frédéric, se défiant de lui-même, faisait revoir par des Français presque tout ce qu'il écrivait dans la langue étrangère qu'il avait adoptée pour la sienne. Il n'acceptait pas sans discussion les changements qu'on lui proposait de faire à son style; un des hommes qu'il honorait de cette mission délicate, le professeur Thiébault, dit quelque part, dans ses *Souvenirs de vingt ans de séjour à Berlin*, que le Roi

*) *Journal français de Berlin*, 1847, N° 43, 44 et 45.

Digitized by Google

défendait vigoureusement ses phrases, et que tel mot, tel tour a donné lieu à des luttes longues et opiniâtres. On comprend maintenant que, suivant l'autorité, la tournure d'esprit, le degré de ténacité de chacun de ses Aristarques, le Roi devait faire quelquefois plus, quelquefois moins de changements, et ceux-ci tantôt d'une espèce, tantôt d'une autre. Aussi l'on trouve des écrits qui sont presque entièrement corrects; il y en a quelques-uns en revanche où les fautes abondent. Enfin, il importe de remarquer que les traités réunis sous le titre d'*Oeuvres philosophiques* ont été composés à des époques bien différentes. Il en est qui datent de la jeunesse du Roi, tels que l'*Antimachiavel*, par exemple, tandis que d'autres sont de son âge mûr ou de sa vieillesse.

Ce qui précède explique les différences de ton qui se font remarquer dans les écrits de Frédéric. Il est même étonnant qu'il n'y en ait pas davantage. L'individualité de l'auteur perce toujours, et non-seulement celle de la pensée, cela s'entend de soi-même, mais celle du style et même de la diction, qui a des caractères parfaitement reconnaissables. C'est d'abord une certaine négligence de grand seigneur, souvent poussée un peu loin; il n'est pas rare de voir le Roi, arrivé à la fin de sa phrase, en oublier le commencement et changer brusquement de construction. Il connaît bien les mots, leur valeur, et jusqu'à leurs nuances; mais sa syntaxe est fréquemment vicieuse, et ses tours de phrase n'ont pas toujours l'élégance et l'harmonie désirables. Le naturel et la clarté, en tant que les défauts dont il vient d'être parlé ne leur nuisent pas, compensent jusqu'à un certain point les imperfections de ce style, qui, d'ailleurs, a ordinairement le mérite de l'originalité et de la vigueur. En somme l'on peut dire que, au point de vue littéraire, les oeuvres de Frédéric se recommandent beaucoup plus par le fond que par la forme. Sans partager toutes ses opinions, on ne peut refuser un honorable tribut d'éloges à la justesse de ses jugements, à la valeur pratique de ses idées et à ce que ses aperçus ont d'ingénieux. Son argumentation est pressante et subtile à tel point, que l'on a de la peine à la réfuter, même dans les cas où il est évidemment dans l'erreur. Les idées philosophiques du Roi sont en général celles des philosophes du XVIIIe siècle, de Voltaire surtout. Mais qu'on ne croie pas qu'il jure *in verba magistri*. Non, il conserve toujours son indépendance, et quand il professe un principe, c'est qu'il l'a bien examiné, et se l'est approprié par une solide méditation. C'est un auteur consciencieux, en un mot, qui peut se tromper, puisqu'il est homme, mais qui du moins se trompe toujours de bonne foi. On ne peut pas en dire autant de tout le monde.

Le nouvel éditeur a rangé les *Oeuvres philosophiques* par ordre de date. Cette disposition, très-convenable à beaucoup d'égards, ne répondrait pas au but que l'on se propose ici. Il paraît préférable de choisir, en gros du moins, l'ordre des matières, qui offre un intérêt historique de plus, puisqu'on peut suivre ainsi le développement des diverses catégories d'idées dans l'esprit de l'auteur. Je commencerai donc par les ouvrages politiques; je dirai ensuite quelques mots des traités sur la législation, la morale, l'éducation,

Digitized by Google

la littérature, et je finirai par ceux qui ont pour objet ce que j'ai appelé plus haut la philosophie pratique.

Les *Considérations sur l'état présent du corps politique de l'Europe* sont le premier en date des vingt opuscules qui composent les *Oeuvres philosophiques.* Elles furent envoyées par l'auteur à Voltaire en 1738, mais elles ne furent pas imprimées de son vivant, et ne parvinrent à la connaissance du public qu'en 1788, année où parurent les *Oeuvres posthumes de Frédéric II, roi de Prusse.* Le Roi, toujours animé de l'ardent patriotisme qui fut, on peut le dire, sa principale passion, voulait, en écrivant ce traité, éclairer son peuple sur la politique et les desseins des ministres des cours. Son but particulier était de donner une idée nette de la position et des projets de la France et de l'Autriche, qu'il ne perdait jamais de vue. Personne à coup sûr n'était mieux placé pour le faire qu'un prince à qui son rang devait valoir bien des confidences précieuses de la part des diplomates de la cour de Prusse. Son esprit positif et lucide ne se serait certes pas contenté de suppositions, et l'on peut être sûr que toutes ses assertions reposent sur des faits bien et dûment constatés par lui. Il trace d'abord le tableau de cette guerre de 1733 à 1738 où les Français, qui brillèrent si peu en Pologne, par leur faute, conquirent le Milanais pour leurs alliés les Espagnols, et finirent pourtant par se faire céder la Lorraine. Il explique parfaitement les véritables desseins et la politique habile de la France, les goûts envahissants de l'Espagne; mais surtout il met dans tout son jour, et avec une rare pénétration, d'un côté, l'insatiable ambition de la maison d'Autriche, de l'autre, le secret de la faiblesse de cette dynastie. Il montre, sans le dire expressément, que l'Europe ou, à proprement parler, la Prusse, a deux ennemis à craindre: la France, gouvernée par un ministre rusé, procédant par voie d'intrigue et de corruption; l'Autriche, préférant avoir recours à la violence, et par là même beaucoup moins redoutable. Il s'agissait pour Frédéric de détruire le prestige que l'Autriche exerçait sur les esprits en Allemagne, d'habituer à ne pas la craindre, et en même temps d'inspirer une salutaire défiance des Français. Après avoir cité plusieurs faits concluants en faveur de sa manière de juger ces deux puissances, il ajoute: „Toutefois ne nous méfions pas tant de ceux qui n'exécutent leurs projets que par les moyens que leur hauteur et qu'un esprit altier leur dicte: ils se desservent eux-mêmes, en ce qu'ils se rendent odieux; leur violence est un antidote qui guérit du venin que leurs desseins ambitieux pourraient communiquer. Mais défions-nous plutôt de ceux qui, par de sourdes pratiques, par des manières flatteuses, par une douceur simulée, veulent nous entraîner dans l'esclavage: ils nous jettent un hameçon dont le fer est caché sous une amorce séduisante, mais qui nous trompe, en nous privant de la liberté, lorsque notre prudence s'y laisse surprendre."

Si je ne me trompe donc, Frédéric veut engager les princes allemands à s'unir contre leurs deux ennemis naturels, l'Autriche et la France. Il leur montre clairement, par l'exemple des Grecs, à qui leur désunion coûta si cher, qu'il faut être unis et se

Digitized by Google

méfier de ces deux voisins, mais sans les craindre. Tout en poussant le cri d'alarme, d'une manière couverte, sans doute, comme les circonstances l'exigeaient, il les rassure en leur montrant qu'avec de l'habileté et de l'énergie on peut toujours se défendre. „Ne nous y trompons point, dit-il: la fortune, le hasard, sont des mots qui ne signifient rien de réel. La véritable fortune de la France, c'est la pénétration, la prévoyance de ses ministres, et les bonnes mesures qu'ils prennent." Paroles pleines de sens, et dont l'histoire a prouvé la justesse.

Les *Considérations* renferment une foule de pensées remarquables soit par leur sagesse, soit par l'élévation et la beauté des sentiments qui les ont dictées. Les leçons que cet auteur de vingt-six ans donne aux souverains (p. 28, 29 et 30) étonnent par la maturité d'esprit qu'elles dénotent, et respirent la plus touchante bonté. On comprend, après les avoir lues, que Voltaire décernât au futur monarque le glorieux surnom de Marc-Aurèle. Si plus tard Frédéric a modifié quelques-unes de ses idées dans ce qu'elles pouvaient avoir de peu pratique, il est cependant resté fidèle aux grands principes qu'il avait posés dans ses *Considérations*, qui seront toujours admirées comme l'oeuvre d'une haute raison et d'un patriotisme éclairé.

L'*Antimachiavel* est un ouvrage de la jeunesse de notre auteur,*) qui a fait beaucoup de bruit dans le temps. La nouvelle édition le donne à double, et voici pourquoi. Frédéric, encore prince royal, avait envoyé son manuscrit à Voltaire, en le priant d'y apporter les changements qu'il jugerait convenables. Celui-ci s'acquitta de sa tâche de telle sorte, que le Roi trouva que son ouvrage était dénaturé. Il parla même de désavouer dans les journaux l'édition revue par Voltaire, et d'en publier lui-même une authentique, ce qui cependant n'a pas eu lieu. L'*Antimachiavel* refondu par Voltaire est tellement connu, qu'on n'aurait pas pu le laisser de côté, et pourtant il ne rend pas toute la pensée du Roi. On s'est donc décidé à donner ce texte, et à imprimer à la suite le manuscrit original de Frédéric, qui a pour titre: *Réfutation du Prince de Machiavel.* Le fond des idées est le même dans les deux textes; mais on trouve dans le dernier des traits que Voltaire avait jugés un peu trop vifs pour les livrer à la publicité. Il y a aussi quelques longueurs et de légères erreurs de détail que l'écrivain français avait eu raison de corriger.

La pensée qui dicta cet ouvrage à Frédéric est grande et généreuse; par malheur elle repose sur une méprise. Il a vu dans le *Prince* un cours de despotisme à l'usage des rois, tandis qu'il est probable que Machiavel s'était borné à exposer des faits réels, c'est-à-dire à dévoiler la tortueuse politique des souverains de son temps. Cette opinion du moins a pour elle une grave autorité. „Le *Prince*, dit M. Ancillon, a été un objet de scandale, parce qu'on en a mal saisi l'esprit. Machiavel, partisan éclairé de la véritable liberté, ne pouvait avoir le but de donner des leçons au despotisme; le *Prince* n'est pas un recueil de pré-

*) 1739—1740.

Digitized by Google

ceptes, ni un traité de l'art de gouverner; c'est un tableau effrayant, mais vrai, des maximes et des moyens que suivaient, du temps de Machiavel, pour se maintenir dans leur usurpation, ceux des tyrans des villes d'Italie qui savaient être conséquents dans le crime. César Borgia et ses pareils ont fourni les principaux traits; Machiavel les a réunis pour l'instruction et l'effroi de Florence, qu'il voulait attacher à sa constitution et à ses lois; et il n'a probablement pas cru qu'en exposant le fait, il serait accusé d'avoir voulu établir le droit de la tyrannie." (*Tableau des révolutions du système politique de l'Europe*, t. I, p. 430.) L'erreur de Frédéric lui a fourni l'occasion de développer de nobles idées, dont quelques-unes sans doute sont des rêves de jeune homme, mais qui font le plus grand honneur à son caractère et à son bon sens. On y rencontre, sur les droits et les devoirs des princes, des maximes que ne désavoueraient pas les libéraux les plus avancés de nos jours; ainsi: „Le souverain, bien loin d'être le maître absolu des peuples qui sont sous sa domination, n'en est lui-même que le premier domestique." (Chap. I.) Il est permis de penser que celui qui écrivait ces lignes dans un enthousiasme un peu juvénile pour les idées de liberté, modifia sa manière de juger lorsqu'il vit le chemin que ces doctrines avaient fait dans les esprits. Le feu avec lequel il défend les souverains dans d'autres écrits autorise à croire qu'il changea d'avis quand les années et l'expérience eurent mûri ses idées. Il n'est pas nécessaire d'aller bien loin pour en acquérir la certitude: on n'a qu'à lire la phrase suivante, extraite des *Mémoires de Brandebourg*, dont la première partie fut terminée vers 1747: „Un prince est le premier serviteur et le premier magistrat de l'État." C'est la même pensée que dans l'*Antimachiavel*, mais déjà adoucie dans la forme, et le prince n'est plus le domestique des peuples, il est le serviteur de l'État, ce qui est un peu différent. Mais en quoi Frédéric fut toujours le même, c'est son amour pour l'humanité et pour les peuples confiés à ses soins, c'est sa conviction que les princes sont faits pour rendre leurs sujets heureux, et non pour vivre dans les plaisirs. Il l'a prouvé par des actes, qui valent mieux que des phrases creuses. L'histoire de son règne entier montre que s'il ne fut pas précisément le domestique de ses sujets, il fut du moins leur ami le plus fidèle et le plus dévoué.

Il serait bien difficile de faire ici l'analyse de l'*Antimachiavel*, car il faudrait commencer par celle du *Prince*, qu'il suit et réfute pas à pas. La nécessité de se faire aimer, l'injustice des conquêtes et la difficulté de les conserver, la beauté d'une politique franche et loyale, l'art de gouverner, les misères de l'ambition, l'insuffisance de la cruauté, la folie des petits princes qui veulent imiter les grands, l'organisation des armées, les désastres de la guerre, voilà les principaux sujets qu'il traite, appuyant toujours ses assertions de preuves historiques, lançant à l'occasion des traits piquants aux princes contemporains, et ne se lassant jamais de prêcher la douceur et l'humanité. On peut lui reprocher son ton déclamatoire et l'enflure de ses invectives. Les mots *infâme*, *monstre*, *docteur du crime* et autres aménités semblables reviennent à chaque instant, et fatiguent par leur répétition monotone. Tout en rendant justice aux sentiments de l'auteur, on ne saurait s'empêcher de

Digitized by Google

trouver qu'il manque parfois de mesure et de bon goût. Ce défaut frappe surtout quand on compare l'*Antimachiavel* avec la *Réfutation du Prince;* mais quoique Voltaire ait effacé beaucoup de ces exubérances déplaisantes, il en reste assez, même dans son texte, pour justifier nos critiques. La comparaison fournit encore une précieuse occasion d'étudier la manière d'écrire de Frédéric; il y a bien plus de fautes et de germanismes dans l'ouvrage original que dans celui que Voltaire a retouché. Néanmoins, en dépit de ces taches, on se sent disposé à tout pardonner à un prince qui sait trouver des pensées comme celle-ci, par laquelle nous terminons cet examen trop succinct de l'*Antimachiavel:* „Le pays le plus heureux est celui où une indulgence mutuelle du souverain et des sujets répand sur la société cette douceur sans laquelle la vie est un poids qui devient à charge, et le monde une vallée d'amertumes au lieu d'un théâtre de plaisirs." (Chap. XXV.)

Il ne suffit pas de critiquer; il faut aussi montrer le chemin, enseigner aux autres l'art de gouverner. Le *Miroir des princes*, ou *Instruction du Roi pour le jeune duc Charles-Eugène de Würtemberg*, fut composé en 1744, lorsque le duc, qui avait achevé son éducation à Berlin, eut obtenu le décret impérial de sa majorité, et quitta la Prusse pour aller prendre possession de sa couronne. Comme le titre le fait voir, cette *Instruction* est un ensemble de conseils donnés à un jeune prince par un homme qui a déjà acquis une certaine expérience dans l'art de régner. Ces avis sont pleins de sagesse: il l'engage à se mettre au fait de l'état des finances du pays qu'il gouverne, à surveiller ses ministres et à ne pas permettre qu'ils se rendent indépendants de leur souverain, à être tolérant en matière religieuse, à observer la plus stricte impartialité dans ses rapports avec ses voisins, à choisir une femme dans une famille égale à la sienne, et surtout à honorer ses parents. „Respectez, lui dit-il, en votre mère l'auteur de vos jours. Plus vous aurez d'égards envers elle, plus vous serez estimable. Ayez toujours tort quand vous pourriez avoir quelque démêlé ensemble. La reconnaissance envers les parents n'a point de bornes; on est blâmé d'en faire trop peu, mais jamais d'en faire trop." Le père le plus éclairé et le plus tendre ne parlerait pas autrement à son fils, et c'est le plus bel éloge qu'on puisse faire de cet écrit fort court, il est vrai, mais substantiel et dicté par la raison même.

Une des pièces les plus imparfaites du recueil, sous le rapport du style, c'est l'*Exposé du gouvernement prussien* *), qui n'avait jamais été publié jusqu'à présent. On pourrait croire que ce n'est qu'une espèce de mémoire que le Roi avait rédigé pour son propre usage, tant il y a de négligence dans la forme. Mais cet exposé si peu littéraire donne des renseignements précieux sur les principes que Frédéric suivait dans son administration. Il faut beaucoup d'ordre et d'économie partout; à plus forte raison en faut-il dans un pays comme la Prusse d'alors, qui avait peu de richesses naturelles. „Comme le pays est pauvre, et qu'il n'a guère de ressources, c'est une chose nécessaire que le sou-

*) 1775 ou 1776.

Digitized by Google

verain ait toujours un trésor bien muni, pour soutenir au moins quelques campagnes." Il est assez de mode aujourd'hui de tourner en ridicule l'ancien système des trésors, comme celui des magasins. Cependant les événements qui se passent sous nos yeux sont de nature à faire réfléchir. Quand on voit les États les plus florissants de l'Europe tomber au bout de peu de mois de crise dans l'état financier le plus déplorable, n'est-on pas tenté de se demander si le crédit, tel qu'il est organisé de nos jours, suffit pour prévenir ces embarras pécuniaires, source de troubles et de révolutions interminables? Toutes les dépenses publiques sont maintenant mieux réglées; les armées sont beaucoup moins fortes à proportion que du temps de Frédéric; nous avons des ressources dont alors on n'avait pas même l'idée: et pourtant quelle différence! Peu d'années après la guerre de sept ans, cette horrible lutte qui avait littéralement épuisé la Prusse, tout était réparé, et l'État plus florissant que jamais. Aujourd'hui, une révolution éclate-t-elle, voilà des milliers de familles ruinées, et tout le pays dans l'angoisse. Quelque opinion que l'on ait sur l'époque actuelle et sur la différence des circonstances, on peut dire avec certitude que, pour son temps du moins, Frédéric avait adopté un système qui a rendu à la Prusse d'immenses services. Pour en revenir à son *Exposé*, il recommande aux princes qui lui succéderont d'avoir toujours l'oeil ouvert sur les desseins des puissances voisines, et de penser sans cesse à l'avenir, conseils sages assurément et qu'on ne s'est jamais repenti d'avoir suivis ...., quand on les a suivis. Ce qu'il dit enfin de l'alliance russe, qu'il conseille préférablement à toute autre, était sans doute très-bon alors; mais maintenant que les bases de l'équilibre européen sont entièrement changées, les souverains de la Prusse auront peut-être d'autres directions à chercher et à suivre.

Après les faits les théories. Frédéric a montré comment il gouverne; il va maintenant nous dire à quelle source il puise ses inspirations. *L'Essai sur les formes de gouvernement et sur les devoirs des souverains* *) est sans contredit un des morceaux les plus intéressants des *Oeuvres philosophiques*, si même il n'en est pas le premier. Les théories en tout genre sont chose commune dans le monde; malheureusement elles ont presque toujours pour auteurs des hommes qui n'ont jamais essayé de les mettre en pratique, et c'est sans doute pour cela qu'elles portent si peu de bons fruits. Ici c'est autre chose. Après avoir gouverné pendant près de quarante ans, en temps de paix et en temps de guerre, le monarque qui a blanchi sous le harnois fait part à la postérité des résultats de sa riche expérience. Toutes les règles qu'il donne, il les a appliquées lui-même, et sait exactement à quoi s'en tenir sur leur mérite. Aussi l'*Essai sur les formes de gouvernement* peut-il être considéré comme le code des rois, code qu'ils doivent méditer nuit et jour, sûrs d'y trouver les leçons d'un vrai maître.

Il commence par exposer l'origine des gouvernements. Selon lui, ils sont tous

*) 1777.

Digitized by Google

sortis du peuple, et n'ont d'autre objet que de le servir. „Les citoyens n'ont accordé la prééminence à un de leurs semblables qu'en faveur des services qu'ils attendaient de lui; ces services consistent à maintenir les lois, à faire exactement observer la justice, à s'opposer de toutes ses forces à la corruption des moeurs, à défendre l'État contre ses ennemis." Les peuples ont donné, suivant leurs besoins, diverses formes à leurs gouvernements; mais partout il y a eu des révolutions, „parce que les hommes sont imparfaits, et que leurs ouvrages le sont par conséquent; parce que les citoyens, poussés par des passions, se laissent aveugler par l'intérêt particulier, qui toujours bouleverse l'intérêt général; enfin, parce que rien n'est stable dans ce monde." Il faut donc que le souverain cherche à gouverner conformément à son origine et de manière à éviter les révolutions, autant que la chose est possible. Pour cela, il est nécessaire qu'il soit, par ses connaissances, à la hauteur de ses importantes fonctions; que sa conduite morale soit exemplaire; qu'il choisisse de bons ministres et les surveille; surtout qu'il ne s'imagine pas que ses intérêts sont autres que ceux de ses sujets. „Le souverain représente l'État; lui et ses peuples ne forment qu'un corps, qui ne peut être heureux qu'autant que la concorde les unit. Le prince est à la société qu'il gouverne ce que la tête est au corps: il doit voir, penser et agir pour toute la communauté, afin de lui procurer tous les avantages dont elle est susceptible. Si l'on veut que le gouvernement monarchique l'emporte sur le républicain, l'arrêt du souverain est prononcé: il doit être actif et intègre, et rassembler toutes ses forces pour remplir la carrière qui lui est prescrite." Il importe d'avoir de bonnes lois, adaptées au caractère du peuple, et un code de procédure simple et court, pour éviter les interminables procès qui ruinent les plaideurs. Les alliances doivent être choisies avec soin. L'organisation militaire est nulle, si elle n'est appropriée à l'esprit du temps et à la constitution physique du pays; ainsi, par exemple, certains États, qui n'ont pas de côtes ni de colonies, „commettraient une faute impardonnable" en créant une marine. Mais les grandes vues politiques, l'entretien du militaire, les meilleures intentions pour le soulagement des peuples, tout cela demeure engourdi, si l'argent ne le vivifie. „L'argent est comme la baguette des enchanteurs." Le grand secret est de s'en procurer sans fouler les peuples. Il faut donc mettre l'attention la plus scrupuleuse, les précautions les plus délicates à la répartition des impôts. Puis il faut favoriser l'industrie et le commerce. Ici l'auteur avance quelques idées que les partisans du libre échange n'accepteront pas sans doute, et qui paraissent en effet erronées, s'il faut en croire les données de l'économie sociale du XIXe siècle. Mais ce qu'on peut approuver sans réserve, ce sont ses recommandations au sujet de la culture des terres.

Ce n'est pas tout que le bien-être matériel des peuples; la société a des besoins d'un ordre plus élevé, qui veulent aussi être satisfaits. En premier lieu se présente la liberté des opinions religieuses. „On peut contraindre par violence un pauvre misérable à prononcer un certain formulaire, auquel il dénie son consentement intérieur; ainsi le persécuteur n'a rien gagné. Mais si l'on remonte à l'origine de la société, il est de toute évidence

Digitized by Google

que le souverain n'a aucun droit sur la façon de penser des citoyens. Ne faudrait-il pas être en démence pour se figurer que des hommes ont dit à un homme leur semblable: Nous vous élevons au-dessus de nous, parce que nous aimons à être esclaves, et nous vous donnons la puissance de diriger nos pensées à votre volonté? Ils ont dit au contraire: Nous avons besoin de vous pour maintenir les lois auxquelles nous voulons obéir, pour nous gouverner sagement, pour nous défendre; du reste, nous exigeons de vous que vous respectiez notre liberté. Voilà la sentence prononcée, elle est sans appel, et même cette tolérance est si avantageuse aux sociétés où elle est établie, qu'elle fait le bonheur de l'État. Dès que tout culte est libre, tout le monde est tranquille; au lieu que la persécution a donné lieu aux guerres civiles les plus sanglantes, les plus longues et les plus destructives. Le moindre mal qu'attire la persécution est de faire émigrer les persécutés; la France a eu des provinces dont la population a souffert, et qui se ressentent encore de la révocation de l'édit de Nantes." Après quelques autres recommandations sur la nécessité d'une conduite morale, sur les graves inconvénients qu'il y aurait à accorder des distinctions à la richesse quand elle n'est pas accompagnée du mérite, Frédéric conclut par ces philosophiques réflexions: „Nous souhaitons que ce faible essai soit capable de former des Marc-Aurèles; ce serait la plus belle récompense à laquelle nous pussions nous attendre, et qui ferait en même temps le bien de l'humanité. Nous devons cependant ajouter à ceci qu'un prince qui fournirait la carrière laborieuse que nous avons tracée ne parviendrait pas à une perfection entière, parce qu'avec toute la bonne volonté possible, il pourrait se tromper dans le choix de ceux qu'il emploierait à l'administration des affaires; parce qu'on pourrait lui représenter les choses sous un faux jour; que ses ordres ne seraient pas exécutés ponctuellement; qu'on voilerait des iniquités de façon qu'elles ne parviendraient pas à sa connaissance; que des employés durs et entiers mettraient trop de rigueur et de hauteur dans leur gestion; enfin, parce que, dans un pays étendu, le prince ne saurait être partout. Tel est donc et sera le destin des choses d'ici-bas, que jamais on n'atteindra au degré de perfection qu'exige le bonheur des peuples, et qu'en fait de gouvernement, comme pour toute autre chose, il faudra se contenter de ce qui est le moins défectueux."

Tel est, en substance, ce remarquable travail du grand Frédéric, où la pureté et la vigueur du style ne le cèdent en rien à la beauté des pensées. A la vérité, il est certains sujets très-importants qu'il n'a pas touchés, entre autres la liberté de la presse. Mais qu'on n'oublie pas que cet *Essai* fut publié plus de douze ans avant la révolution française, en plein pays de régime paternel. Quand on pense aux efforts que Mirabeau dut faire pour contraindre le gouvernement à lui permettre de publier son *Journal des états généraux*, et pour doter ainsi la France de cette liberté qui nous paraît aujourd'hui chose si simple et si naturelle, on ne s'étonnera pas que Frédéric n'ait pas eu l'idée d'en poser le principe. On sait d'ailleurs qu'en pratique il était fort libéral à cet égard, et

Digitized by Google

qu'il avait ainsi devancé la France en ce point comme en beaucoup d'autres. Pour la presse littéraire, il n'y eut pour ainsi dire pas de censure sous son règne. Enfin, cet ouvrage n'est qu'un *Essai*, et n'a pas la prétention d'épuiser la matière. Les omissions sont amplement justifiées par ces considérations. Mais les pensées non moins sages qu'élevées que l'*Essai sur les formes de gouvernement* renferme en grand nombre appartiennent à Frédéric seul, et suffiraient à lui assigner un rang distingué parmi les publicistes.

Il est facile de voir que le point de départ du Roi, dans tout ce qu'il dit de la politique, est l'amour que les coeurs bien nés doivent éprouver pour leur patrie. Cet amour doit animer les princes; mais ce ne serait pas assez. Il faut que tous les citoyens obéissent aux sublimes inspirations du patriotisme. C'est ce que Frédéric démontre dans ses *Lettres sur l'amour de la patrie.* Anapistémon aime à vivre tranquille, et craint de compromettre sa quiétude épicurienne en se vouant au service de l'État. Son ami Philopatros, qui a déjà commencé à le convertir en causant, achève son ouvrage au moyen de quelques lettres où il traite cette matière avec une foule d'excellents arguments auxquels il n'y a qu'un reproche à faire, savoir, d'être des arguments. Il est des choses qui ne se démontrent point, et les affections sont du nombre. On aime ou l'on n'aime pas, mais tous les raisonnements du monde sont impuissants à accélérer les battements d'un coeur insensible. Aussi, tout en reconnaissant que Philopatros a mille fois raison contre son adversaire, et qu'il réfute parfaitement ses objections, il me semble que le meilleur endroit de l'ouvrage est précisément celui où, laissant de côté les preuves, il fait parler la patrie, qu'il personnifie dans cette éloquente prosopopée: „Enfants dénaturés autant qu'ingrats auxquels j'ai donné le jour, serez-vous toujours insensibles aux bienfaits dont je vous comble? D'où tenez-vous vos aïeux? c'est moi qui les ai produits. D'où ont-ils tiré leur nourriture? de ma fécondité inépuisable; leur éducation? ils me la doivent; leurs biens et leurs possessions? c'est mon sol qui les leur fournit. Vous-mêmes, vous êtes nés dans mon sein. Enfin vous, vos parents, vos amis, tout ce que vous avez de plus cher au monde, c'est moi qui vous donnai l'être. Mes tribunaux de justice vous protégent contre l'iniquité, ils défendent vos droits, ils garantissent vos possessions; la police que j'ai établie veille à votre sûreté; vous parcourez les villes et les campagnes également à l'abri des surprises des voleurs et du poignard des assassins; et les troupes que j'entretiens vous défendent contre la violence, la rapacité et les invasions de nos ennemis communs. Je ne me borne pas à contenter vos besoins urgents; mes soins vous procurent les aisances et toutes les commodités de la vie. Enfin, si vous voulez vous instruire, vous trouvez des maîtres en tout genre; désirez-vous de vous rendre utiles, les emplois vous attendent; êtes-vous infirmes ou malheureux, ma tendresse pour vous a ménagé des secours que vous trouvez tout préparés; et pour tant de faveurs que je vous prodigue journellement, je ne vous demande d'autre reconnaissance si ce n'est d'aimer cordialement vos concitoyens, et de vous intéresser avec un attachement véritable à ce qui

Digitized by Google

leur est avantageux; ils sont mes membres, ils sont moi-même, vous ne pouvez les aimer sans aimer votre patrie. Mais vos coeurs endurcis et farouches n'estiment pas le prix de mes bienfaits. Une folie effrénée qui s'est emparée de vos sens vous dirige. Vous désirez de vous séparer de la société, de vous isoler, de rompre tous les noeuds qui vous doivent attacher à moi. Quand la patrie fait tout pour vous, ne ferez-vous rien pour elle? Rebelles à tous mes soins, sourds à toutes mes représentations, rien ne pourra-t-il ni fléchir ni amollir vos coeurs de bronze? Rentrez en vous-mêmes; que l'avantage de vos parents, que vos véritables intérêts vous touchent; que le devoir et la reconnaissance s'y joignent, et conduisez-vous désormais envers moi selon que l'exige de vous la vertu, le soin de votre honneur et de la gloire."

Comme on peut bien le penser, Anapistémon, déjà ébranlé par des arguments tirés des idées de justice, d'honneur et d'intérêt, ne résiste pas à ces accents si vrais. Il s'avoue vaincu, et promet à son ami de consacrer désormais son existence entière à la patrie à laquelle il doit tout.

La politique touche à la législation, ou plutôt la législation n'est qu'une branche de la politique, car qu'est-ce que des institutions qui ne s'appuient pas sur de bonnes lois? Frédéric le savait bien; aussi médita-t-il beaucoup sur les principaux systèmes de législation introduits chez les nations civilisées de l'antiquité et des temps modernes. Il a consigné les résultats de ces études dans sa *Dissertation sur les raisons d'établir ou d'abroger les lois*, où l'on voit avec quel sérieux et quel soin il avait compulsé les nombreux codes qui ont régi le monde. Il commence par un exposé historique des législations de l'antiquité. Après avoir passé en revue les lois des Égyptiens, des Crétois, des Lacédémoniens, des Athéniens, des Romains, il dit quelques mots de celles de l'Angleterre et de l'Allemagne. Il explique ensuite que les lois ont deux sources: le besoin, chez les peuples indépendants, la volonté des conquérants, chez les peuples subjugués. Malgré la grande diversité qu'on observe dans les législations des différents peuples, il est un point où elles concordent, c'est la répression des crimes. Dans tous les cas, les lois ne sont bonnes que quand elles sont adaptées au genre du gouvernement et au génie de la nation qui doit les recevoir. Il y a trois sortes de lois: les lois politiques, les lois pénales et les lois civiles. Ces dernières sont celles qui varient le plus de peuple à peuple. Mais elles doivent toujours être équitables, tout comme les lois pénales doivent être humaines. Il est dangereux de changer trop facilement la législation d'un pays. Cependant il est des cas où la réforme est nécessaire: c'est lorsque les lois sont contraires au bonheur public et à l'équité naturelle, lorsqu'elles sont énoncées en termes vagues et obscurs, et lorsqu'elles impliquent contradiction dans le sens ou dans les termes. Frédéric critique à ce triple point de vue les diverses législations et en particulier celle de la Prusse. Ce qu'il dit est juste sans être bien neuf ni bien original. On peut, de plus, reprocher à ce traité d'être un peu décousu et incomplet; ce sont plutôt des idées juxtaposées qu'une vraie dissertation. Mais

Digitized by Google

on y retrouve toujours l'homme éclairé et juste qui ne se laisse pas éblouir par les apparences ou par des axiomes de convention. La conclusion de cet écrit est d'un vrai sage: „S'imaginer que les hommes sont tous des démons, et s'acharner sur eux avec cruauté, c'est la vision d'un misanthrope farouche; supposer que les hommes sont tous des anges, et leur abandonner la bride, c'est le rêve d'un capucin imbécile; croire qu'ils ne sont ni tous bons ni tous mauvais, récompenser les bonnes actions au delà de leur prix, punir les mauvaises au-dessous de ce qu'elles méritent, avoir de l'indulgence pour leurs faiblesses et de l'humanité pour tous, c'est comme en doit agir un homme raisonnable."

Chaque homme a son idée favorite, à laquelle il revient constamment. On a pu voir que celle de Frédéric, c'est l'importance de la morale. Il n'y a pas un de ses ouvrages où il n'en parle avec amour; on voit tout le prix qu'il y met. Naturellement il a son système, qui est exposé dans deux écrits tellement semblables pour le fond, qu'on peut dire que le second est le développement, le commentaire du premier. Ces deux traités sont l'*Essai sur l'amour-propre envisagé comme principe de morale*, et le *Dialogue de morale à l'usage de la jeune noblesse.**)

Selon notre auteur, la morale ne peut avoir d'autre principe que l'amour-propre, c'est-à-dire l'égoïsme, puisqu'il faut l'appeler par son nom. Il commence par établir que les systèmes philosophiques des anciens et la religion chrétienne ont été également impuissants à rendre les hommes vertueux. Il en conclut qu'il faut employer, pour parvenir à ce but, un principe plus général et plus simple. „Ceux qui se sont appliqués à la connaissance du coeur humain auront sans doute découvert le ressort qu'il faudrait mettre en jeu. Ce ressort si puissant, c'est l'amour-propre, ce gardien de notre conservation, cet artisan de notre bonheur, cette source intarissable de nos vices et de nos vertus, ce principe caché de toutes les actions des hommes. Il se trouve en un degré éminent dans l'homme d'esprit, et il éclaire le plus stupide sur ses intérêts. Qu'y a-t-il de plus beau et de plus admirable que de tirer, même d'un principe qui peut mener au vice, la source du bien, du bonheur et de la félicité publique? Cela arriverait, si cette matière était maniée par les mains d'un habile philosophe: il réglerait l'amour-propre, il le dirigerait au bien, il saurait opposer les passions aux passions, et, en démontrant aux hommes que leur intérêt est d'être vertueux, il les rendrait tels."

Que d'erreurs dans ce peu de mots! Mais avant de combattre les idées de Frédéric, j'ai hâte de dire que sa morale en elle-même est excellente; ce n'est autre chose que la morale du christianisme. Le point de départ seul en est mauvais, ainsi que les conséquences qu'on peut en tirer. De ce que la plupart des hommes prennent leur intérêt pour guide, il ne s'ensuit point qu'on doive ériger leur exemple en loi. Au contraire, la religion chrétienne se propose précisément pour but de changer le coeur humain. Dépouillez

*) Composés tous deux en 1770.

Digitized by Google

le vieil homme pour en revêtir un nouveau, telle est la recommandation que nous trouvons à chaque pas dans l'Évangile, recommandation qu'une sagesse divine a seule pu dicter. En effet, partir de la nature, c'est glorifier tous les vices, car ils sont tous fort naturels. Du moment qu'on prend pour base l'intérêt personnel, chaque individu devient le juge suprême de ses actions, personne n'a le droit de lui faire un reproche, car il peut toujours dire qu'il est seul capable de juger de ce qui lui convient. Et comme on confond très-facilement ses passions avec ses intérêts, une société d'hommes qui ne cherchent pas dans une sphère plus élevée la règle de leur conduite, cette société est livrée à la merci des instincts les plus sensuels, des appétits les plus brutaux. Certes, le Roi ne prévoyait guère, lui, l'homme du dévouement, l'homme aux sentiments nobles et désintéressés, qu'un jour viendrait où ces idées d'intérêt personnel auxquelles il attachait une signification si haute et si pure seraient exploitées par les apôtres des jouissances matérielles et par ceux qui prêchent l'abolition de la famille et de la propriété. Et pourtant il pouvait déjà voir les tristes effets d'un système qui ne peut se soutenir que s'il est professé par des gens dont la vie dément ces détestables principes, par des gens que leur éducation et leurs habitudes mettent au-dessus des suggestions d'un vulgaire égoïsme. Frédéric fait un aveu précieux. „Je ne puis m'empêcher d'avouer à notre honte qu'on s'aperçoit dans ce siècle d'un refroidissement étrange pour ce qui concerne la réforme du coeur humain et des moeurs." Et d'où cela vient-il, si ce n'est de ce que la théorie de l'intérêt personnel tendait, dès les temps de la régence, à se substituer à la loi chrétienne, à la loi du dévouement et de l'abnégation? Le Roi a beau en appeler aux sentiments les plus nobles, et considérer le contentement de soi-même comme la marque qu'on a bien agi. Outre que cela implique contradiction, car quelle jouissance morale y a-t-il à se rendre le témoignage qu'on a bien soigné ses intérêts? nous retombons toujours dans le même cercle vicieux: chaque individu est son propre, son unique juge, et si le juge est aveugle, s'il n'existe pas de critérium absolu, immuable, c'est-à-dire divin, chacun est libre de chercher sa satisfaction là où ses goûts l'entraînent. Or, est-il probable que les classes pauvres, livrées à elles-mêmes et aux instincts souvent grossiers que développent en elles leur genre de vie et leur éducation, est-il probable que ces classes pauvres entendent l'intérêt personnel comme notre auteur? Hélas! que de faits le temps présent fournirait pour appuyer une réponse négative! Il faut au peuple un idéal pour contre-balancer les mauvaises influences de la condition dans laquelle il vit. Cet idéal, la religion peut seule le lui fournir. Je ne veux pas dire par là que la religion ne soit bonne que pour le peuple, et que les personnes instruites puissent s'en passer. Rien n'est plus éloigné de ma pensée. Je crois seulement que les classes éclairées ont, pour arriver à une idée nette du devoir, des moyens qui manquent au peuple, et que, si elles ne peuvent pas vivre moralement sans religion, à plus forte raison les masses populaires ont-elles absolument besoin de la croyance à l'invisible, ce guide sublime de la conscience. Ainsi le système de l'intérêt

Digitized by Google

personnel doit avoir pour effet de démoraliser les classes dites inférieures; or, comme celles-ci sont, en définitive, la source où vont se rajeunir et se retremper les autres classes, comme le peuple est la base des États, adopter ce système, c'est ruiner la société.

Le Roi donc, disons-le, s'est trompé, et cela provient de deux causes: d'abord il considère la grande loi chrétienne: „Ne fais pas à autrui ce que tu ne veux pas qu'on te fasse" comme le mobile de la morale, tandis qu'elle n'en est que la mesure. Il faut faire du bien à nos semblables, non *parce que* nous désirons qu'ils nous en fassent, mais *comme* nous voulons qu'ils nous le rendent. La seconde cause de l'erreur de Frédéric, c'est qu'il regarde les actions des hommes comme la chose essentielle. Mais c'est le principe de ces actions qui renferme l'élément moral. La question n'est pas de savoir ce que l'on fait, mais ce que l'on est. Déifiez l'amour-propre, vous n'avez plus le droit de blâmer les monstrueuses doctrines de nos matérialistes et communistes modernes, car ils entendent leur intérêt à leur manière, et vous ne devez pas vous en étonner. En vérité, on éprouve quelque confusion à réfuter des aberrations si palpables: il semble que leur absurdité devrait frapper tous les esprits. Mais quand on voit quelles redoutables conséquences cette théorie entraîne après elle, on est bien obligé d'en revenir au principe fondamental de toute vertu humaine, savoir: faire la volonté de Dieu, parce que c'est sa volonté. Ainsi, quoique la morale du Roi soit pure absolument parlant, on ne saurait en admettre le principe sans compromettre la morale même et l'existence de la société tout entière. Mais au moins les règles de conduite tirées de l'égoïsme suffisent-elles en pratique pour toutes les circonstances de la vie? Non, elles n'ont pas même ce mérite. L'auteur est hors d'état de résoudre certaines questions délicates qu'il n'a pu éviter de poser dans le *Dialogue*. Il y répond d'une manière évasive, et, ce qui est bien plus extraordinaire chez lui, d'une manière vague et obscure. Le dialecticien le plus habile ne peut pas faire que l'erreur soit vérité, ni que le bien sorte d'une source impure.

Frédéric est plus heureux dans ceux de ses ouvrages qui ont l'éducation pour objet. Comme il s'y borne en général à des conseils pratiques, tout ce qu'il dit est acceptable.

L'*Instruction au major Borcke*, gouverneur du prince royal qui régna plus tard sous le nom de Frédéric-Guillaume II, n'avait pas encore été publiée en entier. Elle date de 1751, et, comme toutes les pièces qui étaient restées en manuscrit, elle offre une rédaction assez négligée, ce qui n'ôte rien au mérite du fond. Le Roi veut qu'on n'enseigne au jeune prince que des choses utiles, et qu'on le fasse sans pédanterie, de manière qu'il y prenne plaisir. Il recommande qu'on lui inspire des idées de tolérance, en le prévenant toutefois en faveur de la religion protestante plutôt que du catholicisme; qu'on cherche à éveiller en lui le goût du militaire, qu'on l'habitue à parler à toutes sortes de gens, surtout „qu'on ne lui mette pas du vent dans la tête," et qu'on lui inculque le respect dû à ses parents. Cette instruction, du reste, n'était destinée que pour la première jeunesse du prince, et il est à regretter que Frédéric n'en ait pas écrit une autre pour les années de l'adolescence.

E *

Digitized by Google

L'*Instruction pour la direction de l'Académie des nobles à Berlin* repose sur des principes analogues aux précédents. Le Roi avait fondé en 1765 une institution où quinze jeunes gentilshommes devaient recevoir une éducation qui les rendît propres au service militaire ou à la diplomatie. Cette instruction ne concerne que l'enseignement et la discipline, la partie économique étant réglée par d'autres dispositions. Les objets d'étude sont la religion, le latin, le français, la rhétorique, la logique, l'histoire, la géographie, la métaphysique, les mathématiques et quelques notions élémentaires de droit. L'auteur recommande avant tout qu'on forme le jugement des élèves, et qu'on ne leur enseigne que ce qui peut être utile dans la vie pratique. Quant à la discipline, il veut qu'on les accoutume au travail, à l'ordre, à la politesse, et qu'on s'efforce de développer en eux la bonté du caractère. „Les gouverneurs leur passeront les tours d'espiègle et de gaieté; ils ne seront sévères que sur ce qui regarde le coeur, des méchancetés, des emportements, des caprices, la paresse surtout, la fainéantise et des défauts pareils, qui perdraient la jeunesse; mais ils se garderont bien de supprimer la gaieté, les saillies, et tout ce qui peut annoncer du génie." Comme on voit briller partout l'esprit libéral du monarque! Les punitions doivent être essentiellement morales; mais ce qui vaut mieux qu'un rigoureux appareil disciplinaire, c'est la précaution que le Roi prend de faire surveiller ces jeunes gens, et de prévenir ainsi leurs fautes. Il y a toujours pour trois élèves un gouverneur qui ne les perd jamais de vue. Il va sans dire que les exercices du corps ne sont pas négligés. *Mens sana in corpore sano* est une sentence que le Roi connaissait.

La *Lettre sur l'éducation* *) est le plus étendu et le plus complet des ouvrages du Roi sur cette matière. Il sera bon de lire sa *Dissertation sur la littérature allemande* (t. VII), où il traite déjà ce sujet, qui paraît l'intéresser vivement. „J'aime, dit-il dans la *Lettre*, à considérer cette jeunesse qui s'élève sous nos yeux; c'est la génération future qui est confiée à l'inspection de la race présente, c'est un nouveau genre humain qui s'achemine pour remplacer celui qui existe, ce sont les espérances et les forces de l'État renaissantes, qui, bien dirigées, perpétueront sa splendeur et sa gloire. Je pense bien, comme vous, qu'un prince sage doit mettre toute son application à former dans ses États des citoyens utiles et vertueux." Ce morceau est au fond une critique de l'organisation et de la marche de l'éducation en Prusse. Mais l'auteur ne se borne pas à signaler le mal; il indique en même temps le remède, et souvent ses critiques sont de véritables préceptes. Après avoir nommé plusieurs établissements célèbres de l'époque, il ajoute: „Le seul reproche qu'on peut leur faire est peut-être qu'ils s'appliquent uniquement à remplir la mémoire de leurs élèves, qu'ils ne les accoutument pas à penser par eux-mêmes, qu'on n'exerce pas d'assez bonne heure leur jugement, qu'on néglige de leur élever l'âme et de

*) 1770.

Digitized by Google

leur inspirer des sentiments nobles et vertueux." Les universités reçoivent en passant quelques conseils bienveillants, mais sévères. Frédéric déplore le discrédit où paraissent être tombées les langues anciennes, il censure vertement les désordres de la vie d'étudiant, l'indolence et la cupidité des professeurs, qui se contentent de lire leurs cours, et qui ne donnent de répétitions qu'à des prix exorbitants, l'usage qui s'est introduit parmi les étudiants de faire composer leurs thèses par des répétiteurs qu'ils payent. „N'est-ce pas, dit-il à ce sujet, encourager la jeunesse à la paresse, à la fainéantise, que de lui apprendre à ne rien faire? Il faut une éducation laborieuse pour l'homme; qu'il compose, qu'on le corrige, qu'il rechange son ouvrage, et qu'à force de le lui faire retravailler, on l'accoutume à penser avec justesse et à s'énoncer avec exactitude." Le Roi se plaint ensuite de la mollesse des jeunes gens des premières familles, qui vivent dans l'oisiveté et fuient le service militaire, parce qu'ils en redoutent la rude mais bienfaisante discipline. Il censure enfin les grands qui croient avoir tout fait lorsqu'ils ont accumulé de l'or pour leurs enfants, ou qu'ils leur ont procuré de hauts emplois. „La justice, les finances, la politique, le militaire honorent sans doute une naissance illustre; mais tout serait perdu dans un État, si la naissance devait l'emporter sur le mérite."

La partie la plus intéressante de la *Lettre* est celle qui traite de l'éducation des filles. „Les gens de la première condition élèvent leurs enfants comme des filles de théâtre; elles semblent mendier les regards du public, elles se contentent de plaire, et elles ne paraissent pas rechercher l'estime et la considération." Il n'y a pas un mot, dans toute cette partie, qui ne porte coup, et les conseils sont empreints du bon sens le plus exquis. „Une fille peut s'amuser à des ouvrages de femme, à la musique, à la danse même, mais surtout qu'on s'applique à lui former l'esprit, à lui donner du goût pour les bons ouvrages, qu'on exerce son jugement, qu'on nourrisse sa raison par la lecture de choses solides, qu'elle ne rougisse point de s'instruire de l'économie; il vaut bien mieux qu'elle règle les comptes de sa maison elle-même, et qu'elle les tienne en ordre, que de contracter follement des dettes de tout côté, sans penser à restituer ce que la bonne foi de ses débiteurs lui a longtemps avancé." Les mariages mal assortis sont critiqués avec autant de verve que de raison; enfin le Roi conclut par cette observation générale, qui est pleine de justesse: „Je m'indigne des peines qu'on se donne dans ce climat rigoureux pour y faire prospérer des ananas, des pisans et d'autres plantes exotiques, et du peu de soins qu'on se donne pour l'espèce humaine. On me dira tout ce qu'on voudra, mais un homme est plus précieux que tous les ananas de l'univers; c'est la plante qu'il faut cultiver, celle qui mérite tous nos soins et tous nos travaux, parce que c'est elle qui fait l'ornement et la gloire de la patrie."

On a dû ranger parmi les *Oeuvres philosophiques* du Roi deux traités qui ont plutôt un caractère littéraire. Ils n'y sont point déplacés cependant, car, de même que son illustre ami Voltaire, Frédéric a philosophé dans tous ses ouvrages. Le premier de ces

Digitized by Google

morceaux est intitulé: *Avant-propos sur la Henriade.**) A proprement parler, c'en est le panégyrique, et un panégyrique outré. Quelque admiration qu'on éprouve, et à juste titre, pour les beautés que renferme cette épopée, il est impossible de partager l'enthousiasme du Roi, qui la met tout simplement au-dessus de l'*Iliade* et de l'*Enéide*. Il a le malheur de louer précisément une des parties les plus faibles du poëme, le merveilleux allégorique dont Voltaire a eu la malencontreuse idée d'orner ou plutôt de déparer son oeuvre. Tant il est vrai qu'il ne faut jamais se hasarder à juger des productions littéraires d'une langue étrangère, sous peine de commettre les plus graves erreurs. Mais si le Roi s'est montré trop indulgent pour son ami, il a du moins su tirer de la *Henriade* des considérations intéressantes sur les guerres de religion, qui, selon lui, ne peuvent pas éclater dans les siècles civilisés. „Les sciences ont toujours contribué à humaniser les hommes, en les rendant plus doux, plus justes et moins portés aux violences; elles ont pour le moins autant de part que les lois au bien de la société et au bonheur des peuples. Cette façon de penser aimable et douce se communique insensiblement de ceux qui cultivent les arts et les sciences au public et au vulgaire; elle passe de la cour à la ville, et de la ville dans les provinces. On voit alors avec évidence que la nature ne nous forma point assurément pour que nous nous exterminions dans le monde, mais pour que nous nous assistions dans nos communs besoins; que le malheur, les infirmités et la mort nous poursuivent sans cesse, et que c'est une démence extrême de multiplier les causes de nos misères et de notre destruction. On reconnaît, malgré la différence des conditions, l'égalité que la nature a mise entre nous, la nécessité qu'il y a de vivre unis et en paix, de quelque nation, de quelque opinion que nous soyons; que l'amitié et la compassion sont des devoirs universels: en un mot, la réflexion corrige en nous tous les défauts du tempérament." Ces lignes peuvent soutenir la comparaison avec le passage si souvent cité du discours de Cicéron pour le poëte Archias: *Haec studia adolescentiam agunt*, etc. Je crois que ce rapprochement n'aurait pas déplu à Frédéric.

Les *Réflexions sur les Réflexions des géomètres sur la poésie***) sont une réfutation du discours de d'Alembert intitulé: *Réflexions sur la poésie, écrites à l'occasion des pièces que l'Académie a reçues cette année (1760) pour le concours.* On connaît le fameux mot d'un mathématicien qui, sortant de voir une tragédie, disait: C'est beau, mais qu'est-ce que cela prouve? C'est contre cette tendance prosaïque, fort à la mode dans le XVIIIe siècle, que sont dirigées les *Réflexions sur les Réflexions.* D'Alembert a-t-il défendu, dans le discours attaqué par le Roi, l'erreur des esprits hostiles à la poésie, c'est ce qu'il m'est impossible de dire, n'ayant pu me procurer à temps son ouvrage. La réfutation de Frédéric est écrite dans un style badin et railleur qui lui sied à merveille. Il se moque des arguments des géomètres contre la poésie, et leur montre qu'ils n'y entendent rien; en même temps il plaide

*) 1739. **) 1762.

Digitized by Google

en fort bons termes la cause de la langue divine des vers qu'ont parlée tant de beaux génies depuis Homère jusqu'à l'auteur de la Henriade. Il prend surtout chaudement la défense de la mythologie attaquée par les esprits trop positifs des savants. Tout ce morceau est écrit de verve, et se fait lire avec plaisir. On regrette seulement d'y trouver une phrase comme celle-ci, qu'un Français ne se serait jamais permise: „Qu'un Pascal, qu'un Malebranche n'aient pas aimé la poésie, et que ces deux grands hommes d'ailleurs en aient jugé comme des imbéciles, cela prouve qu'on parle de travers de ce qu'on ne connaît pas, et c'est une grande leçon pour le vulgaire et pour les philosophes mêmes de s'instruire avant de décider." Il est certaines épithètes qu'un sentiment délicat des convenances littéraires empêchera toujours d'accoler à des noms aussi justement révérés que ceux de Malebranche et de Pascal.

Le morceau précédent ouvre une série d'ouvrages dans lesquels le Roi montre un talent véritable, et qui sont tout à fait appropriés au genre de son esprit caustique et malin; je veux parler des écrits polémiques. Les premiers en date sont le *Discours sur les satiriques* et le *Discours sur les libelles*, qui furent composés tous deux en 1759. Ils étaient proprement destinés à défendre le Roi contre les indignes attaques de certains pamphlétaires que soudoyaient les cours de France et d'Autriche. Mais le spirituel écrivain, en tacticien consommé qu'il est, n'a garde de laisser échapper une si belle occasion de faire, comme on dit vulgairement, d'une pierre deux coups: il repousse les attaques de ses ennemis, et leur lance de ces traits cruels dont la blessure ne se cicatrise jamais. Ses ennemis, ce sont ceux des honnêtes gens, ceux de tout élan généreux, ce sont ces méchants écrivailleurs qui, de propos délibéré, critiquent tout et se posent en censeurs de l'humanité dont ils sont le rebut, prétendus génies incompris qui essayent de bouleverser la société où leur mince mérite n'a pu trouver de place. On ne peut se défendre d'éprouver un secret plaisir en voyant la main royale flageller d'insolents calomniateurs, et leur imprimer au front un sanglant stigmate d'infamie. „Y a-t-il rien de plus pitoyable que de faire métier de noircir les réputations, d'inventer des impostures grossières, de calomnier à tort et à travers, de crier, de publier des mensonges pour contenter sa méchanceté? En entendant ces vaines clameurs, on est porté à croire que tout l'univers est en danger; et, à l'examiner, ce n'est au fond qu'un chien qui aboie à la lune. Ces sortes de déclamateurs qui attaquent avec cette effronterie impudente les hommes en place sont, pour la plupart, des misérables inconnus dans leur obscurité; ils deviennent les organes mercenaires de quelque grand, envieux d'un compétiteur, ou ils se livrent à la turpitude de leur coeur, au funeste penchant de mordre comme des dogues enragés ceux que le hasard leur fait rencontrer dans leur chemin. A les lire, on croirait qu'ils ont des espions gagés dans les cours, qui leur rendent compte des moindres particularités qui s'y passent; mais leur imagination supplée en effet à leur ignorance, et ils connaissent aussi peu ceux que leur plume maltraite que la vertu qu'ils outragent

Digitized by Google

si étrangement." Ne croirait-on pas lire une sortie de Juvénal? Ne peut-on pas dire de Frédéric ce que le satirique romain dit de lui-même: *Facit indignatio versum?* Et tout est de la même force, on n'a que l'embarras du choix. Dans le passage suivant, le Roi fait voir que la vraie cause de la rage des pamphlétaires n'est autre que l'envie qui les ronge; il y montre en même temps combien les libelles sont dangereux. „Si j'avais un conseil à donner à ces beaux esprits qui s'érigent ainsi en censeurs de personnes respectables, ce serait de prendre à présent un tour nouveau; car, depuis Salomon, injures et louanges, tout a été dit, tout a été épuisé. Qu'ils essayent de se peindre eux-mêmes dans leurs écrits, qu'ils expriment le désespoir que leur cause la prospérité des grands, l'aversion qu'ils ont pour les talents et pour le mérite dont l'éclat les anéantit, qu'ils donnent à l'univers une grande idée des connaissances qu'ils ont dans l'art de régner. Il y a encore des royaumes électifs: peut-être feront-ils fortune et les croira-t-on sur leur parole; au moins leur ingénuité nouvelle épargnerait-elle aux lecteurs l'ennui d'autres atrocités et d'autres impertinences. Si le peuple était sensé, on pourrait se rire des libelles, quels qu'ils fussent; mais ces indignes écrits sont un mal réel, parce que le monde peu instruit, enclin à croire le mal plutôt que le bien, reçoit avidement de mauvaises impressions qu'il est difficile de déraciner; de là naissent des préjugés souvent préjudiciables aux monarques mêmes." Hélas! qu'aurait dit Frédéric s'il eût vécu de nos jours!

Non-seulement les attaques des folliculaires sont coupables, mais elles sont inutiles. „Ni les médisances, ni les satires, ni les calomnies ne corrigent les hommes; elles aigrissent les esprits, elles les irritent, elles peuvent leur inspirer le désir de la vengeance, mais non celui de se corriger; au contraire, un injuste reproche prouve l'innocence, et nourrit l'amour-propre au lieu de l'éteindre." Est-ce donc à dire qu'il doive être interdit aux citoyens de surveiller la marche de leur gouvernement et d'avertir celui-ci de ses fautes, quand il en commet? Non sans doute; mais autant une critique mesurée et loyale est utile, nécessaire même, quelque rigoureuse qu'elle soit, autant des attaques gratuites sont odieuses, sans compter qu'elles manquent complétement le but.

Le Roi montre en finissant que ce pouvoir suprême tant envié, tant insulté, n'est rien moins qu'un lit de roses. „Les têtes sur lesquelles la puissance et le pouvoir sont le plus accumulés méritent plutôt qu'on les plaigne que d'être enviées; les grands qui gouvernent la terre sont souvent découragés d'un ouvrage pénible qui n'a point de fin. Sans cesse obligés de vivre dans l'avenir par leurs réflexions, de tout prévoir, de tout prévenir, responsables des événements que le hasard, qui se joue de la prudence humaine, fait arriver pour rompre leurs mesures, accablés de travaux, les fatigues deviennent une espèce de soporifique qui à la longue assoupit les sentiments de la gloire, et les porte à désirer le repos philosophique d'une vie privée. Il est plus nécessaire de réveiller en eux ces sentiments de la gloire que de travailler à les étouffer; il faut encourager les hommes au lieu de les rebuter, et c'est ce que jamais libelles ne feront."

Digitized by Google

Ces citations, extraites du *Discours sur les satiriques*, suffisent pour faire connaître l'esprit qui anime tout l'ouvrage. Les idées du *Discours sur les libelles* sont les mêmes; la forme seule est différente. Là, c'est un discours suivi; ici, un dialogue très-vif, où le Roi a déployé toute l'ironie dont on dit que Socrate accablait ses contradicteurs. Après avoir enlacé son adversaire dans les replis d'une argumentation dont la subtilité se cache sous une feinte bonhomie, il le couvre de ridicule, en le montrant aussi lâche que méchant, ce qui est encore un trait caractéristique de cette espèce de gens; puis il termine par cette réflexion non moins juste que simple: „Ne peut-on pas conclure de tout cela que, quand même la méchanceté étoufferait les remords, elle n'est jamais sans appréhensions cruelles, et qu'une vie vertueuse est la seule tranquille?"

La société athée du baron d'Holbach publiait des ouvrages destinés à répandre et à accréditer ses tristes doctrines, qui ne tendaient à rien moins qu'à renverser toute autorité autre que celle des soi-disant philosophes d'alors. Comme l'Église et l'État se soutenaient mutuellement (fait que je constate sans le juger), il fallait, dans le système de l'attaque, les ruiner l'un et l'autre. L'*Essai sur les préjugés*, attribué d'abord à Du Marsais, puis reconnu ensuite pour un produit de l'officine d'Holbach, essaye de battre en brèche à la fois et la religion chrétienne, qu'il traite de superstition, et le pouvoir royal, qu'il appelle simplement despotisme. Dans son *Examen* de cet *Essai* *), Frédéric le réfute avec une grande supériorité. C'est ici le lieu de dire de quelle nature est à mes yeux l'incrédulité de Frédéric, si vantée par les uns, si amèrement blâmée par d'autres. Je puis me tromper, mais il me semble que tous l'ont mal jugé. Frédéric n'était point l'ennemi systématique de la religion chrétienne. Mais il doutait, et l'on verra plus bas qu'un scepticisme sincère était à la base de toutes ses spéculations philosophiques. Dans cet écrit-ci, il s'élève contre la prétention qu'affiche l'auteur de l'*Essai sur les préjugés* de poser des principes d'une évidence incontestable. „Si la vérité était faite pour l'homme, dit-il, elle se présenterait naturellement à ses yeux; il la recevrait sans efforts, sans longues méditations, et son évidence, victorieuse de l'erreur, entraînerait infailliblement la conviction après elle; on la distinguerait à des signes certains de l'erreur, qui souvent nous trompe en paraissant sous cette forme empruntée; il n'y aurait plus d'opinions, il n'y aurait que des certitudes. Mais l'expérience m'apprend tout le contraire: elle me montre qu'aucun homme n'est sans erreur; que les plus grandes folies que l'imagination en délire ait enfantées en tous les âges sont sorties du cerveau des philosophes; que peu de systèmes de philosophie sont exempts de préjugés et de faux raisonnements; elle me rappelle les tourbillons que Des Cartes imagina, l'Apocalypse que Newton, le grand Newton commenta; l'harmonie préétablie que Leibniz, génie égal à celui de ces grands hommes, avait inventée. Convaincu de la faiblesse de l'entendement humain, et frappé des erreurs de ces

*) 1769.

Digitized by Google

célèbres philosophes, je m'écrie: Vanités des vanités, vanité de l'esprit philosophique!" Frédéric admet bien les idées religieuses de l'*Essai sur les préjugés* dans ce qu'elles ont de négatif; mais il conteste aux philosophes la possibilité de connaître la vérité en elle-même. Il se sépare donc avec éclat de l'école philosophique dont le baron d'Holbach était un des coryphées; il doute, parce qu'il a examiné lui-même sans parvenir à se former une conviction; il ne professe pas l'incrédulité par esprit de coterie, et pense encore moins à substituer des croyances arbitraires à la foi qu'il n'a plus. En un mot, il doute aussi bien des idées philosophiques nouvelles que des anciennes traditions religieuses.

Dans la seconde partie il repousse avec énergie les injustes critiques dirigées par l'*Essai sur les préjugés* contre le gouvernement français. Il insinue que la grande colère de l'auteur vient probablement des blessures de son amour-propre, et que ce grand ennemi des préjugés est loin d'en être exempt lui-même. Le Roi défend aussi avec beaucoup d'éloquence les militaires, les juges, les administrateurs attaqués avec autant d'aigreur que de légèreté, et il conclut par ce mot dédaigneux: „Je regrette le temps que j'ai perdu à lire cet ouvrage et celui que je prends encore à vous en faire le recensement."

L'*Examen critique du Système de la nature**) prouve combien les athées sont de pauvres dialecticiens. Il démolit un à un tous leurs sophismes, il met à nu le ridicule et le danger de leur théorie de la fatalité, ainsi que les contradictions où ils tombent en s'irritant contre les prêtres et le gouvernement, qui, n'étant selon eux que des machines mues par une irrésistible fatalité, ne sauraient mériter la colère d'un homme conséquent avec ses principes. Il y a donc un être intelligent qui est la source de tout. Nous ne pouvons pas arriver à le connaître assez pour le définir, mais tout l'univers lui sert de preuve et de témoignage. Les attaques du *Système de la nature* contre la religion chrétienne sont injustes et déplacées, parce que le mal qu'on lui attribue a pour cause les passions des hommes. „Il ne fallait pas confondre la loi avec l'abus, les choses écrites et les choses qui se pratiquent, la véritable morale chrétienne avec celle que les prêtres ont dégradée." Sans doute Frédéric ne veut pas dire par là qu'il accepte la partie dogmatique du christianisme; il s'en explique même très-clairement un peu plus loin. Mais il abhorre et combat l'injustice, quels qu'en soient les auteurs et les victimes. Enfin il stigmatise vigoureusement les injures et les platitudes que le *Système de la nature* vomit contre les souverains; il prouve sans réplique que l'auteur ne connaît „ni les hommes, ni comment il faut les gouverner," qu'il n'a d'un philosophe que le nom, et que les améliorations qu'il propose ne feraient qu'aggraver les souffrances des peuples. „Il faut donc, conclut-il, lorsqu'on se croit assez lumineux pour pouvoir éclairer le public, se garder surtout de proposer des remèdes pires que les maux dont on se plaint, et, quand on ne peut faire mieux, s'en tenir aux anciens usages, et surtout aux lois établies." Il y a beaucoup de gens qui ne seront

*) 1770.

Digitized by Google

pas de l'avis du monarque, et pour cause; mais, heureusement pour la Prusse, Frédéric n'avait pas suivi leurs leçons.

Dans ce XVIIIe siècle si empressé de tout détruire, on s'attaquait à tout ce que les hommes avaient respecté jusqu'alors. Rien n'était épargné, et il fallait que les honnêtes gens employassent toutes leurs forces et tout leur temps à étayer l'édifice social qui craquait déjà de toutes parts. Les arts et les sciences eurent aussi leur tour. Un philosophe hypocondriaque que son goût pour le paradoxe entraînait parfois jusqu'à l'absurde en dépit de tout son génie, Rousseau avait osé avancer que la civilisation faisait le malheur de l'homme, et que l'état sauvage était la source de toutes les félicités. Quoique de pareilles aberrations se détruisent d'elles-mêmes, Frédéric ne put contenir l'impatience qu'elles lui causaient, et il prit la peine de combattre Rousseau dans son *Discours sur l'utilité des sciences et des arts dans un État.**) Il y fait voir qu'on ne peut pas avancer une seule bonne raison contre la culture intellectuelle de l'humanité. Beaucoup de personnes prétendent, par exemple, qu'un peuple abruti est plus facile à gouverner qu'un peuple civilisé. Voici comment le Roi leur répond: „Il s'est trouvé de faux politiques, resserrés dans leurs petites idées, qui, sans approfondir la matière, ont cru qu'il était plus facile de gouverner un peuple ignorant et stupide qu'une nation éclairée. C'est vraiment puissamment raisonner, tandis que l'expérience prouve que plus le peuple est abruti, plus il est capricieux et obstiné, et la difficulté est bien plus grande de vaincre son opiniâtreté que de persuader des choses justes à un peuple assez policé pour entendre raison. Le beau pays que celui où les talents demeureraient éternellement étouffés, et où il n'y aurait qu'un seul homme moins borné que les autres!" On sait du reste que Frédéric ne se contentait pas de prêcher en paroles la nécessité du développement intellectuel et moral du peuple. Plus loin, il examine successivement tous les éléments de la vie des sociétés, et montre avec une grande lucidité combien les idées de Rousseau sont fausses. „Tous les princes éclairés, dit-il enfin, ont protégé ceux dont les savants travaux ont honoré l'esprit humain, et les choses, de nos jours, en sont venues au point que, pour peu qu'un gouvernement européen négligeât d'encourager les sciences, il se trouverait bientôt arriéré d'un siècle à l'égard de ses voisins." Que si quelqu'un voulait objecter que le Roi se donne une peine inutile en réfutant des paradoxes qui n'éblouissent personne, nous lui répondrons qu'il n'est jamais inutile de prendre la défense de la vérité, car les sophismes même les plus absurdes trouvent toujours des esprits disposés à les croire, comme le prouvent les attaques si fréquentes de ces dernières années contre ce que certain parti appelle l'aristocratie de l'intelligence.

J'ai réservé pour la fin le morceau où Frédéric me paraît s'être expliqué le plus clairement au sujet de ses opinions philosophiques: c'est la *Dissertation sur l'innocence des erreurs de l'esprit.***) Ce traité, en forme de dialogue, est destiné à démontrer que les hommes

---

*) 1779. **) 1738.

Digitized by Google

ne parviennent jamais à connaître la vérité, et que par conséquent nous devons user de tolérance à l'égard de ceux qui n'ont pas les mêmes opinions que nous. C'est bien là cette philosophie pleine d'humanité dont on peut contester le principe, mais qu'il est impossible de ne pas aimer dans ses effets. Le doute, cette maladie des grands esprits, le doute, qui tourmenta Pascal jusqu'à la fin de ses jours, telle est la conclusion où une longue expérience et d'immenses études ont amené un des esprits les plus perspicaces qu'il y ait eu, le seul homme auquel un siècle moqueur ait donné le nom de grand! „L'erreur, dit-il, est notre partage. Cette erreur a plus d'une source. Il paraît que le Créateur ne nous a pas destinés pour posséder beaucoup de science et pour faire un grand chemin dans le pays des connaissances: il a placé les vérités dans des abîmes que nos faibles lumières ne sauraient approfondir, et il les a entourées d'une épaisse haie d'épines. La route de la vérité offre des précipices de tous côtés; on ne sait quel sentier suivre pour éviter ces dangers; et si l'on est assez heureux pour les avoir franchis, on trouve sur son chemin un labyrinthe où le fil merveilleux d'Ariane n'est d'aucun usage, et d'où on ne peut jamais se tirer. Les uns courent après un fantôme imposteur qui les trompe par ses prestiges, et leur donne pour bonne monnaie ce qui est de faux aloi; ils s'égarent, semblables à ces voyageurs qui suivent dans l'obscurité les feux follets dont la clarté les séduit. D'autres devinent ces vérités si secrètes; ils croient arracher le voile de la nature, ils font des conjectures, et c'est un pays où il faut avouer que les philosophes ont fait de grandes conquêtes. Les vérités sont placées si loin de notre vue, qu'elles deviennent douteuses, et prennent de leur éloignement même un air équivoque. Il n'en est presque aucune qui n'ait été combattue; c'est qu'il n'en est aucune qui n'ait deux faces: prenez-la d'un côté, elle paraît incontestable; prenez-la de l'autre, c'est la fausseté même. Rassemblez tout ce que votre raisonnement vous a fourni pour et contre, réfléchissez, délibérez, pesez bien, vous ne saurez à quoi vous déterminer. Tant il est vrai qu'il n'y a que le nombre des vraisemblances qui donne du poids à l'opinion des hommes. Si quelque vraisemblance pour ou contre leur échappe, ils prennent le mauvais parti; et comme jamais l'imagination ne peut leur offrir avec une même force le pour et le contre, ils se détermineront toujours par faiblesse, et la vérité se dérobe à leurs yeux."

Ce qu'il y a de remarquable, c'est que Frédéric n'avait que vingt-six ans lorsqu'il écrivait ces lignes, et qu'il ne s'est jamais départi des convictions qu'elles expriment. Mais continuons. Il énumère et explique d'une manière piquante les diverses sources de l'erreur. Les premiers principes et les ressorts de la nature sont ou trop petits ou trop immenses pour être perçus par les hommes. Nous ne nous connaissons pas nous-mêmes, nos facultés et nos organes sont trop imparfaits pour embrasser la vérité dans toute son étendue. Or, une vérité incomplète n'est pas la vérité. Les préjugés de l'éducation ajoutent encore à cette faiblesse. Enfin, l'erreur même est souvent si agréable, que nous n'avons seulement pas le courage de chercher à en sortir. Il faut donc être indulgent pour ceux qui se trompent, d'autant

Digitized by Google

plus que leur nombre est immense. „Pour extirper l'erreur de l'univers, il faudrait exterminer tout le genre humain. Croyez-moi, ce n'est pas notre façon de penser sur des matières spéculatives qui peut influer sur le bonheur de la société, mais c'est notre manière d'agir. Soyez partisan du système de Tycho Brahé ou de celui des Malabares, je vous le pardonnerai sans peine, pourvu que vous soyez humain; mais fussiez-vous le plus orthodoxe de tous les docteurs, si votre caractère est cruel, dur et barbare, je vous abhorrerai toujours."

Ainsi le fait trop vrai que les hommes se débattent constamment dans les filets de l'erreur a amené Frédéric à cette conclusion, qu'il faut se renfermer dans le doute. On n'a pas le droit de l'en blâmer, quoiqu'on puisse tout aussi logiquement conclure du même fait que, puisqu'il n'y a pas de démonstration possible des vérités les plus importantes pour l'homme, il ne nous reste d'autre ressource que la foi. Mais que le Roi se soit trompé ou non, les conséquences pratiques qu'il déduit de son système sont de nature à mériter pleinement le respect et l'admiration de tout être pensant.

Me voici parvenu à la fin de ma tâche, mais je ne l'ai point remplie. A peine ai-je effleuré mon vaste sujet. C'est donc presque avec remords que je pose le livre et la plume. Cependant il m'eût été impossible de faire mieux dans le peu de pages dont il m'était permis de disposer. Rien n'est plus difficile que d'analyser les écrits de Frédéric. Le tissu de ses pensées est tellement serré, les développements y tiennent si peu de place, qu'il faudrait, pour ainsi dire, transcrire littéralement ses ouvrages pour en donner une idée exacte et complète. Le critique est donc forcé de se contenter d'une esquisse tout à fait superficielle. Mais j'éprouve, en quittant le Roi, des regrets d'une autre espèce. La lecture de ses *Oeuvres philosophiques* fait du bien au coeur, même à celui qui n'est pas de son avis en tout. La raison en est fort simple: c'est une oeuvre de bonne foi. Ses livres sont le miroir de sa belle âme. Quand on sait que toute la vie d'un écrivain, et d'un écrivain couronné, est d'accord avec ses écrits, que ce qu'il a dit, il l'a fait, on se repose sur lui avec une entière confiance, et la confiance est un sentiment bien doux. Les études littéraires intéressent surtout lorsqu'elles font pénétrer dans les profondeurs du coeur humain. Connaître un homme qui dit de bonnes choses et qui a prêché d'exemple, incite à la vertu et agrandit l'intelligence. Aussi m'estimerais-je heureux, si j'avais l'espoir de faire mieux apprécier le grand Frédéric par ce court travail, dont les passages empruntés au royal auteur font le principal ou plutôt le seul mérite.

Ch. de la Harpe.

Digitized by Google

TABLEAU HISTORIQUE DU COLLÉGE.

DEPUIS LA ST. MICHEL 1847 JUSQU'A LA ST. MICHEL 1848.

I. INSTRUCTION.

PREMIÈRE CLASSE.

(Inspecteur spécial: le Directeur.)

1. ***Religion.*** (2 leç. p. sem.) Lecture et explication de l'Épître de St. Paul aux Éphésiens, dans l'original. — Histoire de la réformation. — FOURNIER.

2. ***Hébreu.*** (2 leç. p. sem.) Répétition de la partie étymologique de la grammaire. Thèmes et extemporalia. — Explication de la Genèse, chap. 1—12 et des psaumes XIX—XXXII. — SCHMIDT.

3. ***Grec.*** (6 leç. p. sem.) Sophocle, Oedipe-Roi. — Homère, l'Iliade, chant VI—XI. En outre les élèves ont lu une partie de l'Iliade en particulier. — KRAMER. (3 leç.)
Thucydide, liv. II.; Démosthène, les Philippiques 1. 2. les harangues *de Chersonneso* et *de Pace*; Thèmes. — MICHELET. (3 leç.)

4. ***Latin.*** (10 leç. p. sem.) Horace, Odes, liv. IV. I, 1 — 24. Epodes, 1. 2. Épitre aux Pisons. Des odes choisies ont été apprises par coeur. — KRAMER. (3 leç.)
Tacite, Histoires l. III—V; la Germanie. — Cicéron, *pro Milone; de oratore I.* Extemporalia, thèmes, compositions; de tems en tems les écoliers ont récité des discours, composés par eux-mêmes, et soutenu des thèses. — MULLACH. (7 leç.)

5. ***Français.*** (3 leç. p. sem.) Cours de littérature (XVIII et XIX siècles.) — Lecture: Morceaux choisis de Pascal, de La Rochefoucauld et de La Bruyère. Rhétorique: théorie de l'art oratoire; exercices pratiques, lecture de modèles tirés des oeuvres de Bossuet, de Pascal, de Fléchier, de Buffon, de Mirabeau, de Vergniaud, etc. — Théorie de la récitation. — Compositions et improvisations. — DE LA HARPE.

6. ***Allemand.*** (2 leç. p. sem.) Cours de littérature depuis 1300 — 1770. — Explication de quelques poëmes de Klopstock, de Goethe et de Schiller. — Compositions et discours débités librement. — KRAMER.

7. ***Anglais.*** (2 leç. p. sem.) Lecture de Henri IV, Ire partie par Shakespeare et d'une partie de l'Antiquaire par Walter Scott. — Thèmes et traductions orales de l'allemand en anglais; compositions. — FRANZ.

8. ***Histoire.*** (3 leç. p. sem.) Histoire universelle depuis Charlemagne jusqu'à la guerre de trente ans. — Répétition de l'histoire ancienne. — KRAMER.

9. ***Mathématiques.*** (4 leç. p. sem.) La stéréométrie; les combinaisons et permutations; les sections coniques; compléments de géométrie plane; problèmes de géométrie et d'algèbre. — JOACHIMSTHAL.

10. ***Physique.*** (2 leç. p. sem.) Le magnétisme et l'électricité; l'optique. — JOACHIMSTHAL.

11. ***Philosophie.*** (2 leç. p. sem.) Cours de psychologie. — MICHELET.

Digitized by Google

SECONDE CLASSE.

(Inspecteur spécial: le Docteur LHARDY.)

1. ***Religion.*** (2 leç. p. sem.) Dogmatique populaire: les dogmes qui concernent l'homme et l'oeuvre de la redemption. — Lecture et explication de la seconde moitié de l'Évangile selon St. Jean, dans le texte original. — FOURNIER.

2. ***Hébreu.*** (2 leç. p. sem.) Cours d'étymologie d'après Gesenius. Explication des morceaux correspondants du manuel de Brückner *(Neues hebr. Lesebuch.)* Thèmes. Le 1er chapitre de la Genèse a été appris par coeur. — SCHMIDT.

3. ***Grec.*** (6 leç. p. sem.) Homère, Odyssée III. IV. VI. VII. — Xénophon, Hellenica III, 2—IV, 5. — Répétition des verbes irréguliers. — Extemporalia. — Lecture domestique: Homère, Odyssée V. VIII. XIII. XIV. Plusieurs morceaux de l'Odyssée ont été appris par coeur. — LHARDY.

4. ***Latin.*** (10 leç. p. sem.) Virgile, Énéide, chant III et IV.
Tite Live, liv. I. — Cicéron, *in Catilinam* or. III. — Salluste, Catilina. — Répétition de la Syntaxe du verbe et explication de la syntaxis ornata d'après la grammaire de Zumpt. — Thèmes et extemporalia. Lecture domestique: Tite Live, liv. XXVI. XXVII. — LHARDY.

5. ***Français.*** (4 leç. p. sem.) Lecture: Polyeucte par Corneille, Michel Perrin par Mélesville, Hernani par Victor Hugo, l'Avare par Molière. — Cours de versification. — Exercices de déclamation et d'élocution. — Compositions sur des sujets donnés. — JEANRENAUD.

6. ***Allemand.*** (2 leç. p. sem.) Cours de poétique: la poésie épique et lyrique. — Compositions et discours débités librement. — ZINZOW.

7. ***Anglais.*** (2 leç. p. sem.) Les élèves de seconde sont combinés pour cet objet avec ceux de première. — FRANZ.

8. ***Histoire.*** (3 leç. p. sem.) Histoire universelle depuis la bataille d'Actium jusqu'à Charlemagne. — Histoire des Babyloniens, des Assyriens, des Perses, des Hébreux, des Phéniciens et des Égyptiens. — Précis de la géographie des pays habités par ces peuples. — KRAMER.

9. ***Mathématiques.*** (4 leç. p. sem.) Géométrie: La trigonométrie. La mesure des aires. Le cercle. Application de l'algèbre à la géométrie.
Algèbre: Les puissances. Les radicaux. Les logarithmes. Les équations du premier et du second degré. — JOACHIMSTHAL.

10. ***Physique.*** (2 leç. p. sem.) Les corps liquides et gazeux; théorie de la chaleur (en hiver); les propriétés générales des corps; la mécanique des corps solides (en été). — JOACHIMSTHAL.

TROISIÈME CLASSE.

PREMIÈRE SECTION.

(Inspecteur spécial: le professeur JEANRENAUD.)

1. ***Religion.*** (2 leç. p. sem.) Explication du Symbole des apôtres et de l'oraison dominicale. — Lecture de la seconde moitié de l'Évangile selon St. Luc. — Introduction aux livres de l'Ancien testament et du Nouveau. — Les élèves ont appris par coeur un grand nombre de cantiques. — FOURNIER.

Digitized by Google

2. ***Grec.*** (6 leç. p. sem.) L'Anabase de Xénophon, liv. VII. et I. — Les verbes en μι et les verbes irréguliers. — MULLACH. (5 leç.)

Répétition du cours des classes inférieures. Extemporalia. — KRAMER. (1 leç.)

3. ***Latin.*** (10 leç. p. sem.) Ovide, Métamorphoses liv. XII, 257 — XIII. (incl.) Plusieurs morceaux ont été appris par coeur. Répétition des règles de la prosodie. — LHARDY. (3 leç.)

Quinte Curce, liv. III — V. Cours de syntaxe (l'emploi des tems, des modes, des participes, du gérondif et du supin), thèmes et extemporalia. — WEILAND. (7 leç.)

4. ***Français.*** (4 leç. p. sem.) Lecture: Satires et épîtres de Boileau. — Exercices de déclamation, Syntaxe, exercices de style. — JEANRENAUD.

5. ***Allemand.*** (2 leç. p. sem.) Compositions. Exercices de déclamation et de récitation. Lecture de plusieurs morceaux classiques en poësie et en prose. — ZINZOW.

6. ***Anglais.*** (2 leç. p. sem.) Les éléments de la langue d'après la grammaire de Foelsing. — Lecture de la *Vie de Colomb* par W. Irwing. — FRANZ.

7. ***Histoire.*** (2 leç. p. sem.) Histoire d'Allemagne. Géographie et Histoire du royaume de Prusse. — WEILAND.

8. ***Géographie.*** (2 leç. p. sem.) Répétition de la géographie de l'Europe. Géographie mathématique. — SCHWEITZER.

9. ***Mathématiques.*** (4 leç. p. sem.) Élémens de géométrie d'après Lacroix jusqu'à l'aire des polygones. — Algèbre: Extraction de la racine carrée et cubique des quantités littérales. Reductions. Proportions. Équations du premier degré à une et à plusieurs inconnues. Problèmes. — JEANRENAUD.

SECONDE SECTION.

(Inspecteur spécial: le Docteur Weiland.)

1. ***Religion.*** (2 leç. p. sem.) Explication de la première moitié de l'Évangile selon St. Luc. Répétition du contenu historique de l'Ancien testament. — Les élèves ont appris par coeur un grand nombre de cantiques. — FOURNIER.

2. ***Grec.*** (6 leç. p. sem.) Explication du livre élémentaire de Jacobs p. 170—210. Répétition du cours de quatrième. — MULLACH. (4 leç.)

Les verbes réguliers et les verbes en μι. — WEILAND. (2 leç.)

3. ***Latin.*** (10 leç. p. sem.) Ovide, Métamorphoses liv. IX, 101—272. X, 86—297. XI, 85—220. 410—572. Cours de prosodie. — MULLACH. (2 leç.)

César, la guerre des Gaules l. VII et VIII. Les règles du subjonctif et de l'infinitif. Répétition du cours des classes inférieures. Thèmes et extemporalia. — WEILAND. (8. lec.)

4. ***Français.*** (4 leç. p, sem.) Lecture de la Henriade et du Diplomate par Scribe. Cours de syntaxe (substantif, pronoms, adjectif, verbe), thèmes et extemporalia. Etude du vocabulaire de Plötz et conversations. Exercices de déclamation. — PLÖTZ. (DE LA HARPE.)

5. ***Allemand.*** (2 leç. p. sem.) Lecture de quelques drames de Schiller et de Koerner. — Exercices de déclamation et d'élocution. Compositions. — PLÖTZ. (BODE.)

6. ***Histoire.*** (2 leç. p. sem.) Histoire romaine jusqu'au règne d'Auguste. Histoire grecque. — PLÖTZ. (SCHWEITZER.)

7. ***Géographie.*** (2 leç. p. sem.) Répétition de la géographie de l'Asie, de l'Afrique, de l'Amérique et de l'Océanie. Géographie physique. — SCHWEITZER.

Digitized by Google

8. ***Mathématiques.*** (4 leç. p. sem.) Élémens de géométrie d'après Lacroix jusqu'aux triangles semblables. — Les quatre opérations du calcul littéral, la théorie des équations du premier degré à une seule inconnue. Extraction des racines quarrée et cubique des nombres entiers et des fractions. — JEANRENAUD.

QUATRIÈME CLASSE.

(Inspecteur spécial: le Docteur CHAMBEAU.)

1. ***Religion.*** (2 leç. p. sem.) Événements principaux de l'histoire de l'église chrétienne jusqu'à la mort de Boniface. Histoire de la résurrection de Jésus-Christ d'après les quatre Évangiles. Explication de plusieurs paraboles de Jésus-Christ. Plusieurs cantiques ont été appris par coeur. — SCHMIDT.

2. ***Grec.*** (6 leç. p. sem.) Cours de grammaire: la partie étymologique jusqu'au verbe pur inclusivement, d'après le manuel publié à l'usage du Collége. — Traduction de quelques morceaux du même manuel. — SCHMIDT.

3. ***Latin.*** (8 leç. p. sem.) Cornelius Nepos: les biographies de Pélopidas, d'Agésilas, d'Eumène, de Phocion, de Timoléon, des Rois, d'Amilcar, d'Annibal, de Caton — Cours de syntaxe d'après le manuel publié à l'usage du Collége, en particulier les règles des cas. — Répétition des cours des classes inférieures. — Thèmes et Extemporalia. — CHAMBEAU.

4. ***Français.*** (4 leç. p. sem.) Lecture et traduction orale de plusieurs morceaux des Études historiques par Beauvais. — Traductions de l'allemand en français d'après Fraenkel. — Répétition des verbes irréguliers. — Cours de syntaxe jusqu'au verbe inclusivement (les règles du participe et du subjonctif). — Exercices d'orthographe et de déclamation. — CHAMBEAU.

5. ***Allemand.*** (2 leç. p. sem.) Exercices de lecture et de déclamation. — Compositions. — SCHMIDT.

6. ***Géographie*** et ***Histoire.*** (3 leç. p. sem.) Géographie physique et politique de l'Europe, accompagnée d'une histoire abrégée de ses habitants d'après le manuel publié par le maître. — SCHWEITZER.

7. ***Mathématiques.*** (4 leç. p. sem.) Arithmétique: Les fractions décimales. Calcul numérique pratique.

Géométrie: Notions préliminaires; des angles; des lignes parallèles et perpendiculaires; de l'égalité des triangles. — JOACHIMSTHAL.

8. ***Calligraphie.*** (1 leç. p. sem.) — LA PIERRE.

9. ***Dessin.*** (2 leç. p. sem.) — MARESCH.

10. ***Chant.*** (2 leç. p. sem.) — LA PIERRE.

CINQUIÈME CLASSE.

(Inspecteur spécial: le Docteur SCHWEITZER.)

1. ***Religion.*** (2 leç. p. sem.) La vie de Jésus-Christ; l'histoire des apôtres (d'après Zahn, *Bibl. Historien*). — Répétition des cinq articles du catéchisme. Des cantiques et des passages de l'Écriture sainte ont été appris par coeur. — SCHMIDT.

Digitized by Google

2. ***Latin.*** (7 leç. p. sem.) Explication du manuel de Gedike. — Cours de grammaire: Verbes irréguliers; répétition du cours de la sixième classe; syntaxe élémentaire. Thèmes, d'après le manuel d'O. Schultz; Extemporalia. — SCHWEITZER.

3. ***Français.*** (6 leç. p. sem.) Lecture de Numa Pompilius par Florian. — Traductions de l'allemand en français. — Cours de Grammaire jusqu'au verbe exclusivement. — Les verbes irréguliers. — Exercices d'orthographe et de déclamation. — CHAMBEAU.

4. ***Allemand.*** (3 leç. p. sem.) Compositions. Exercices d'orthographe, de lecture et de déclamation. — PLÖTZ (en hiver), CLAUS (en été).

5. ***Géographie*** et ***Histoire.*** (3 leç. p. sem.) Géographie de l'Afrique, de l'Amérique, de l'Asie et des Terres Australes, accompagnée de notices historiques sur les habitants de ces pays, d'après le manuel publié par le maître. — Histoire des états du Roi de Prusse jusqu'à l'an 1815. — SCHWEITZER.

6. ***Arithmétique.*** (3 leç. p. sem.) La règle de trois simple et composée. — JOACHIMSTHAL.

7. ***Calligraphie.*** (2 leç. p. sem.) — LA PIERRE.

8. ***Dessin.*** (2 leç. p. sem.) — MARESCH.

9. ***Chant.*** (2 leç. p. sem.) Les élèves de cinquième sont réunis en partie avec ceux de quatrième, en partie avec ceux de sixième. — LA PIERRE.

SIXIÈME CLASSE.

(Inspecteur spécial: le Docteur ZINZOW.)

1. ***Religion.*** (2 leç. p. sem.) Histoire succincte de l'Ancien Testament et du Nouveau (d'après Zahn, *Bibl. Historien*). Les principaux articles du catéchisme et plusieurs cantiques et passages de l'Écriture sainte ont été appris par cœur. — SCHMIDT.

2. ***Latin.*** (7 leç. p. sem.) La partie étymologique de la grammaire jusqu'aux verbes irréguliers. Un grand nombre de mots ont été appris par coeur. — Traductions du latin en allemand et vice versa (d'après Gercke, *Uebungsstücke*). — ZINZOW.

3. ***Français.*** (6 leç. p. sem.) Exercices de lecture et d'orthographe. — Traductions du français en allemand et de l'allemand en français. — Conjugaison des verbes auxiliaires et réguliers. — Un grand nombre de mots on été appris par coeur. — LA PIERRE.

4. ***Allemand.*** (3 leç. p. sem.) Exercices de lecture et de déclamation. — Exercices de grammaire, d'orthographe et de composition. — ZINZOW.

5. ***Géographie.*** (3 leç. p. sem.) Notions générales de la Géographie mathématique et physique. Topographie générale de la terre; tableau des mers, des îles, des montagnes, des fleuves et des principales villes des cinq parties de la terre, d'après le manuel publié par le maître. SCHWEITER.

6. ***Arithmétique.*** (3 leç. p. sem.) Le calcul des fractions. — ZINZOW.

7. ***Calligraphie.*** (3 leç. p. sem.) — LA PIERRE.

8. ***Dessin.*** (2 leç. p. sem.) — MARESCH.

9. ***Chant.*** (2 leç. p. sem.) — LA PIERRE.

Digitized by Google

II. CHRONIQUE DU COLLÉGE.

Le cours du semestre d'hiver, commencé le 15 Octobre 1847, a duré jusqu'au 12 Avril 1848, celui du semestre d'été, ouvert le 27 Avril, sera terminé le 30 Septembre.

Le 15 Octobre on célébra la fête anniversaire de Sa Majesté. Les maîtres et les élèves du Collége s'étant réunis, à 8 heures du matin, dans le grand auditoire, le directeur leur adressa un discours allemand. Partant de la convocation des États provinciaux réunis, par laquelle la Prusse venait d'entrer dans une nouvelle phase de son développement politique, il démontra que les causes de sa puissance croissante avaient été: la protection toute particulière de Dieu, la grandeur de ses princes, l'énergie de son peuple, enfin l'heureux accord, le dévouement mutuel qui, pendant des siècles, avait formé un lien indissoluble entre ses princes et leurs sujets. Il finit par faire les voeux les plus ardents, pour que ces seules sources véritables de la prospérité de notre patrie ne tarissent jamais dans cette nouvelle époque de son existence politique.

Le corps des maîtres a éprouvé aussi dans cette année scolaire quelques changements. Mr. le Prof. *Heinsius*, attaché au Collége français depuis 1805 comme maître de littérature allemande, ayant obtenu une retraite fort honorable et bien méritée, cessa d'en faire partie depuis la St. Michel de 1847. Je ne puis que répéter ici, au nom du Collége, les sentiments de reconnaissance et de respect, de même que les voeux sincères que nous eûmes déjà l'occasion si heureuse d'exprimer lors de la célébration de son jubilé en 1846. Mr. le Prof. *Noël* fut empêché, aussi durant le cours de cette année, par l'état de ses yeux, de rentrer en fonction. Nous espérons qu'à la St. Michel prochaine il sera entièrement rétabli. Les leçons que ces deux maîtres avaient données, ont été distribuées entre plusieurs maîtres, attachés déjà auparavant au Collége, principalement entre Mrs. les Drs. *Schmidt*, *Zinzow* et *Plötz*. Le dernier cependant nous a quitté à la St. Jean pour occuper une place de maître ordinaire au gymnase de Lübeck. En exprimant le regret sincère que nous a causé la perte de ce maître aussi habile que zélé, je le remercie ici publiquement des services distingués qu'il a rendus au Collége. Il fut remplacé en partie par Mr. le Dr. *Bode*, membre du séminaire pédagogique, en partie par Mrs. *Schweitzer* et *de la Harpe*. Déjà avant lui, à la St. Michel passée, Mr. le Dr. *Kuntze*, après avoir terminé son année d'épreuve avec approbation, quitta le Collége pour se rendre à Burg, où il avait obtenu une place de maître ordinaire à l'école secondaire. A la même époque Mr. le Dr. *Joachimsthal*, revenu de son voyage en France, entra définitivement au corps des maîtres du Collége, et reprit les leçons qu'il avait données déjà avant son voyage. En même tems le candidat en pédagogie Mr. *Claus* commença son année d'épreuve.

Digitized by Google

Les prix pour les progrès dans l'étude de la langue française, fondés par feu Mr. *Monod*, se sont distribués, comme de coutume, au mois de Janvier de l'année courante. Le conseil académique ayant examiné les compositions en vers et en prose qui avait été présentées au concours, les accorda à *Herrmann Makower* de première, *Charles Duvinage* de seconde, *Samuël Makower* de grand' troisième et *Alphonse Marguet* de petit' troisième. Des prix extraordinaires furent donnés à *Jules Hegewald* de première, à *Eugène Matthieu* et à *Jules Harang* de seconde, à *Albert Cavet* et à *Adolphe Fliess* de petit' troisième.

III. PRÉCIS

des rescrits émanés du Collége royal des écoles de la Province de Brandebourg.

Du 21 Août 1847. Recommandation du manuel publié par Mr. *Vogel* sous le titre „*Germanien.*"

Du 28 Septembre 1847. Recommandation des globes publiés par l'institut géographique à Weimar.

Du 19 Octobre 1847. Les élèves du progymnase de Deutschkrone, qui ont quitté cette institution avec le certificat de maturité, devront être reçus, s'ils le désirent, dans la première classe d'un gymnase quelconque, sans subir un nouvel examen.

Du 21 Juin c. Le ministère du culte etc. convoquera le 25 Juillet une commission composée de directeurs et de professeurs de différens colléges, pour discuter la nécessité d'une réforme ou d'une réorganisation des gymnases et des autres institutions semblables. Pour lui fournir des matériaux plus complets, les corps des maîtres sont engagés à adresser au Collége des écoles les désirs et les propositions qu'ils croient dans leur intérêt particulier de faire.

Du 17. Juillet c. La commission susdite ne se réunira pas, mais à sa place des députés, choisis par les maîtres eux-mêmes, seront convoqués après quelques mois pour le même but.

Du 29 Juillet c. Les articles 1, 2 et 4 de l'arrêt de la diète germanique du 14 Novembre 1834 ne seront plus ajoutés aux certificats des abiturientes.

Digitized by Google

IV. STATISTIQUE DU COLLÉGE.

Nombre des élèves suivant le dernier programme	227
Nombre des élèves qui ont quitté le Collége dans le cours de l'année .	67
Reste	160
Nombre des élèves inscrits dans le cours de l'année	67
Nombre des élèves qui fréquentent à présent le Collége	227

Savoir: en première 13; en seconde 23; en grand' troisième 17; en petit' troisième 43; en quatrième 49; en cinquième 45; en sixième 37.

Les élèves de première qui, dans le cours de l'année, ont obtenu le certificat de maturité, pour passer à l'université, sont au nombre de cinq, savoir:

I. A l'examen de la St. Michel 1847.

1. *Otton Frédéric Antoine de Lancizolle*, né à Berlin le 12 Avril 1829, fils d'un professeur, de confession évangélique, a fréquenté le Collége cinq ans, la première classe deux ans. Il alloit étudier en droit à Berlin.

2. *Charles Frédéric Albert Diewitz*, né à Berlin le 14 Novembre 1826, fils d'un chef d'école, de confession évangélique, a fréquenté le Collége 8 ans, la première classe 2 ans. Il alloit étudier en théologie à Berlin.

3. *Alexandre Herrmann Gustave comte de Wartensleben*, né à Berlin le 12 Avril 1828, fils du comte de Wartensleben sur Carow, de confession évangélique, a fréquenté le Collége 6 ans, la première classe 2 ans. Il alloit étudier en droit à Berlin.

4. *Jean Otton Théodore de Bülow*, né à Francfort s/m. le 28 Décembre 1827, fils d'un conseil intime de légation, de confession évangélique, a fréquenté le Collége 5 ans, la première classe 2 ans. Il alloit étudier en droit à Berlin.

II. A l'examen de Pâques de l'année courante.

5. *Charles Frédéric Guillaume Herrmann Alexandre comte de Schlippenbach*, né à Berlin le 19 Septembre 1830, fils d'un major, de confession évangélique, a fréquenté le Collége 6 ans et demi, la première classe 2 ans.

Les 61 autres écoliers qui, dans le cours de l'année, ont quitté le Collége sont les suivants:

Digitized by Google

DE PREMIÈRE.

6. *François Zschiesche*, pour se vouer à l'économie rurale. 7. *Émile Sterbel*, pour entrer dans un bureau. 8. *Rodolphe Wagner*, pour se faire libraire. 9. *Louis Mathieu*, pour se faire jardinier.

DE SECONDE.

10. *Émile Rolke*, pour se faire pharmacien. 11. *Charles Mathieu*, pour se faire jardinier. 12. *Albert Bier*, pour continuer ses études en particulier. 13. *Charles Gross*, pour se faire vétérinaire. 14. *Gustave Holzapfel*, pour entrer au commerce. 15. *Guillaume Violet*, pour se faire libraire. 16. *Gustave Keltz*, pour se faire musicien. 17. *Moise Arnswalder*, a quitté Berlin. 18. *Charles Lesser*. 19. *Paul Fournier*, pour se vouer à l'économie rurale.

DE GRAND' TROISIÈME.

20. *Jules Loeff*, de même. 21. *Théodore Menthe*, de même. 22. *Albert Rubeau*, de même. 23. *Charles Maurer*, pour se faire soldat. 24. *Severin de Trczinski*, pour continuer ses études en particulier. 25. *François de Trczinski*, de même. 26. *Alexandre Alisch*, a quitté Berlin. 27. *Guillaume Reuschler*, pour entrer au commerce. 28. *Ferdinand Herrmann*, de même.

DE PETIT' TROISIÈME.

29. *Rodolphe Trossin*. 30. *Émanuel Schaller*, pour passer à un autre collége. 31. *Oscar de Lepel*, de même. 32. *Wladislas de Trczinski*, de même. 33. *Gustave Schulze*. 34. *Émile Asimont*, pour entrer au commerce. 35. *Frédéric Schulze*, a quitté Berlin. 36. *Charles de Clausewitz*, de même. 37. *Erneste de Prittwitz*, de même. 38. *Herrmann Alisch*, de même.

DE QUATRIÈME.

39. *Eugène Guyot*. 40. *Théodore Maassen*. 41. *Herrmann Bosch*. 42. *Maximilien Barschall*. 43. *Erneste Herrmann*. 44. *Reinhold Harder*. 45. *Waldemar de Niederstetter*. 46. *Charles Lattermann*. 47. *Erneste Wagner*. 48. *Otton Kraemer*. 49. *Adolphe Bohleke*. 50. *Émile Schuchard*. 51. *Adolphe Koch*. 52. *Harry de Spilcker*.

DE CINQUIÈME.

53. *Frédéric Béringer*. 54. *Henri Burchardt*. 55. *Paul Michelet*. 56. *Théodore de Zaborowski*. 57. *Louis Roquette*. 58. *Gautier Behrend*. 59. *Juste de Rosenberg-Gruſzczynski*. 60. *Nicolas Karaſs*. 61. *Herrmann Neddermann*.

DE SIXIÈME.

62. *Charles Göbeler*. 63. *Jean de Prittwitz*. 64. *Stanislas de Trczinski*. 65. *Charles de Möller-Holdkamp*. 66. *Gustave Taube*.

Digitized by Google

Les élèves des trois dernières classes sont entrés en appressentissage, ou ont été repris par leurs parens, pour être élevés ailleurs. Plusieurs en ont quitté Berlin par suite des événements de Mars.

Enfin nous avons eu, aussi dans cette année, la douleur de perdre par la mort un élève, *Guillaume Jung* de petit' troisième. Le choléra-morbus l'ayant attaqué, un même jour le vit en pleine santé et mort! Puisse Dieu lui-même consoler sa pauvre mère, qui espérait trouver un jour dans ce fils exemplaire et tendrement chéri l'appui de sa vieillesse! Son souvenir sera cher à ses maîtres et à ses condisciples.

V. EXAMEN PUBLIC.

L'examen public aura lieu le 29 Septembre dans le grand auditoire et se fera dans l'ordre suivant:

Le matin depuis huit heures.

Quatrième:	*Grec*	Mr. Schmidt.
—	*Français*	— Chambeau.
Petit' troisième:	*César*	— Weiland.
—	*Géographie*	— Schweitzer.
Grand' troisième:	*Mathématiques*	— Jeanrenaud.
—	*Quinte Curce*	— Weiland.
Seconde:	*Xénophon*	— Lhardy.
—	*Mathématiques*	— Joachimsthal.
Première:	*Cicéron*	— Mullach.
—	*Histoire*	— Kramer.

Plusieurs écoliers réciteront des morceaux de poésie, et deux élèves de première prononceront des discours composés par eux-mêmes; le directeur remettra aux abiturientes les certificats de maturité.

Le soir depuis trois heures.

Cinquième:	*Histore*	Mr. Schweitzer.
—	*Arithmétique*	— Joachimsthal.
Sixième:	*Latin*	— Zinzow.
—	*Français*	— La Pierre.

L'examen commencera et finira par le chant et plusieurs élèves réciteront des morceaux de poésie français et allemands.

Digitized by Google

Les vacances, qui suivront l'examen public, dureront quinze jours. Le cours du semestre d'hiver commencera le 16 Octobre.

Les parens, qui désirent placer leurs fils au Collége, me trouveront chez moi tous les jours de la semaine, depuis 8 heures du matin à midi.

Au nom de mes collègues et de mes disciples j'ai l'honneur d'inviter à la solennité prochaine de l'examen public les respectables chefs du Collége: Monsieur le Conseiller intime *de Ladenberg*, chargé du Ministère royal du culte et de l'instruction publique, avec Messieurs les Conseillers du même Ministère; Monsieur *de Patow*, Grand-Président de la Province de Brandebourg; Messieurs les Conseillers du Consistoire et du Collége royal des écoles de la province, spécialement Monsieur le Conseiller de régence *Lange*, en sa qualité de Commissaire royal; Messieurs les membres du Conseil académique, Inspecteurs du Collége, spécialement Monsieur le Conseiller *Fournier* en sa qualité d'Éphore; les parents des élèves, et tous ceux qui s'intéressent aux progrès des lettres et à l'instruction de la jeunesse.

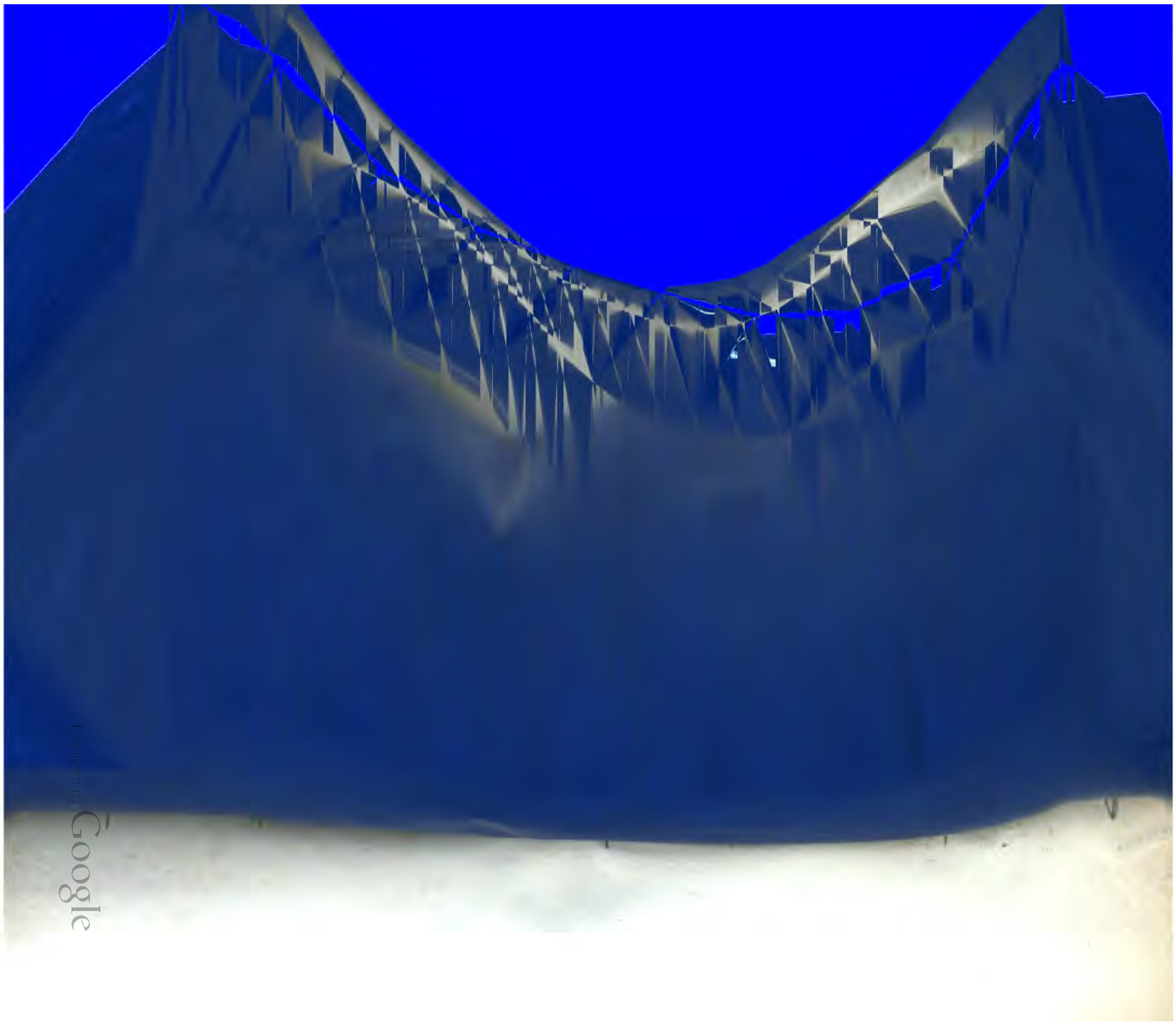
Berlin, le 1er Septembre 1848.

Kramer.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

3 2044 091 897 751

Digitized by Google